Bilkent Üniversitesi
Matematik Bölümü

Ayın Sorusu

Ekim 2017

Soru:

$$m^6 = n^{n+1} + n - 1$$

eşitliğini sağlayan tüm (m, n) pozitif tam sayı ikililerini bulunuz.

Çözüm: Cevap: $(m, n) = (1, 1)$.

$n = 1$ ise tek çözüm $(m, n) = (1, 1)$. $n > 1$ olsun.

n tek sayı olursa

$$2n^{\frac{n+1}{2}} + 1 > n^{\frac{n+1}{2}} > n > n - 1 > 0$$

ve buradan

$$(n^{\frac{n+1}{2}})^2 < (m^3)^2 = n^{n+1} + n - 1 < (n^{\frac{n+1}{2}} + 1)^2$$

elde ederiz. Fakat $(m^3)^2$ sayısı iki ardışık tam kare arasında olamaz: n çift sayıdır.

$n \not\equiv 2 \pmod 3$ olma zorundadır, aksi takdirde

$$3n^{\frac{2(n+1)}{3}} + 3n^{\frac{n+1}{3}} + 1 > n^{\frac{2(n+1)}{3}} > n > n - 1 > 0$$

ve

$$(n^{\frac{n+1}{3}})^3 < (m^2)^3 = n^{n+1} + n - 1 < (n^{\frac{n+1}{3}} + 1)^3$$

elde ediyoruz. Fakat $(m^3)^3$ sayısı iki ardışık tam küp arasında olamaz.

$n \not\equiv 0 \pmod 3$ olma zorundadır, aksi takdirde

$$n^{n+1} + n - 1 \equiv -1 \equiv (m^3)^2 \pmod 3$$

Sonuç olarak $n \equiv 4 \pmod 6$. Şimdi

$$m^6 + 3 = n^{n+1} + n + 2 \equiv (-1)^{n+1} + 1 \pmod{n+1}$$

ve n çift olduğundan $m^6 + 3 \equiv 0 \pmod{n+1}$. p asal sayısı $n+1$ sayısını bölerse $n+1 \equiv 5 \pmod 6$ olduğundan $p > 3$ ve $m^6 \equiv -3 \pmod p$ olduğundan -3 p modunda kare kalandır. $p > 3$ olduğundan $p \equiv 1 \pmod 3$. $n+1$ sayısının tüm asal bölenleri 3 modunda 1 dir. Bu nedenle $n+1 \equiv 1 \pmod 3$ ve buradan da $n \equiv 0 \pmod 3$. Bu da $n \equiv 4 \pmod 6$ ile çelişiyor. Tek çözüm: $(m, n) = (1, 1)$.