**Bilkent Üniversitesi**
**Matematik Bölümü**

# Ayın Sorusu

Nisan 2017

**Soru:**

$t$ bir gerçel sayı olmak üzere, tüm $x, y$ gerçel sayıları için

$$f(xy + f(y)) = f(x)y + t$$

denklemini sağlayan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonlarının sayısı $g(t)$ olsun. $g(t)$ fonksiyonunu bulunuz.

**Çözüm:**

$f(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$ fonksiyonu $t = 0$ için bir çözümdür. Bir $x_0$ için $f(x_0) \neq 0$ olsun. Denkleme $x = x_0$ yazarsak $f(x_0y + f(y)) = f(x_0)y + t$ elde ederiz. Demek ki $f$ örten fonksiyondur.

$x = 0$ yazarsak $f(f(y)) = f(0)y + t$ elde ederiz. $f(0) = 0$ ise,$f(f(y)) = t$. $f$ in örten olduğundan $x \in \mathbb{R}$ için $f(x) = t$. Bu sadece $t = 0$ için çözümdür. $f(0) \neq 0$ kabul edersek, $f$ birebir fonksiyon oluyor.

$f$ örten olduğundan bir $c$ için $f(c) = 0$. $x = c$ alırsak $f(cy + f(y)) = t$ olur. $f$ birebir olduğundan tüm $y \in \mathbb{R}$ için $cy + f(y)$ bir sabite eşit olmalıdır. Buradan $k$ ve $c$ birer sabit olmak üzere, her $y \in \mathbb{R}$ için $f(y) = k - cy$. Bunu denkleme yazarsak $c^2 = k$ ve $k - kc = t$ elde ederiz. Demek ki $t = c^2 - c^3$. $g(c) = c^2 - c^3 = c^2(1 - c)$ fonksiyonu $[-\infty, 0]$ ve $[1, \infty)$ intervallarinde azalandır. AO-GO eşitsizliğinden $0 < c < 1$ için $g(c) \leq 4/27$. Demek ki $t = c^2 - c^3$ denkleminin $t < 0$ ve $t > 4/27$ için tek, $t = 0$ ve $t = 4/27$ için iki, $0 < t < 4/27$ için üç çözümü bulunuyor:

$$g(t) = \begin{cases} 1 & \text{if } t < 0,\ \ t > \frac{4}{27} \\ 2 & \text{if } \ t = 0,\ \ t = \frac{4}{27} \\ 3 & \text{if } \ 0 < t < \frac{4}{27} \end{cases}$$