Bilkent Üniversitesi
Matematik Bölümü

Ayın Sorusu

Mart 2017

Soru:

Bir r rasyonel sayısı ve bir n pozitif tam sayısı için, $S_r(n) = 1^r + 2^r + \cdots + n^r$ olsun. a, b pozitif rasyonel sayı ve c pozitif tam sayı olmak üzere, sonsuz çoklukta n pozitif tam sayısı için $S_a(n) = (S_b(n))^c$ olmasını sağlayan bütün (a, b, c) üçlülerini belirleyiniz.

Çözüm: Cevap: $a = 3, b = 1, c = 2$ ve $a = b \in \mathbb{Q}^+, c = 1$.

Bernoulli eşitsizliğini kullanarak n ye göre tümevarımla tüm pozitif tam n ve pozitif rasyönel r sayıları için

$$\frac{n^{r+1}}{r+1} \leq S_r(n) \leq \frac{(n+1)^{r+1}}{r+1}$$

eşitsizliğini elde ederiz.

$r = a$ ve $r = b$ için $S_a(n) = (S_b(n))^c$ olduğundan

$$\frac{n^{a+1}}{a+1} \leq \left(\frac{(n+1)^{b+1}}{b+1}\right)^c \text{ ve } \left(\frac{n^{b+1}}{b+1}\right)^c \leq \frac{(n+1)^{a+1}}{a+1} \; .$$

Buradan sonsuz sayıda pozitif n tam sayısı için

$$\frac{n^{(b+1)c}}{(n+1)^{a+1}} \leq \frac{(b+1)^c}{a+1} \leq \frac{(n+1)^{(b+1)c}}{n^{a+1}}$$

elde ederiz.

Son eşitsizlikte $n \to \infty$ alırsak $(b+1)c = a+1$ ve $(b+1)^c = a+1$ olur. $c = 1$ ise $a = b$. $c > 1$ ise $c = (b+1)^{c-1}$ ve buradan da c ve dolayısıyla b tam sayı olma zorundadır. $b \geq 1$ olduğundan $c \geq 2^{c-1}$ ve buradan $c = 2$. Demek ki $b = 1, a = 3$. Bu çözüm de koşulları sağlıyor.