



Bilkent Üniversitesi
Matematik Bölümü

AYIN SORUSU

Aralık 2016

Soru:

Öğretmen sınıfa 20 tane matematik ve 16 tane fizik sorusundan oluşan bir liste vererek, her öğrencinin tam olarak 1 matematik ve 1 fizik sorusu seçip çözmesini istiyor. Aynı soru ikilisi birden fazla öğrenci tarafından seçilmemişse ve her öğrencinin seçtiği iki sorudan en az biri kendisinden başka en çok bir öğrenci tarafından seçilmişse, bu sınıfta en çok kaç öğrenci olabileceğini bulunuz.

Çözüm: Cevap: 64.

$1 \leq i \leq 20$, $1 \leq j \leq 16$ ikilisi için i Nolu matematik ve j nolu fizik sorusu bir öğrenci tarafından seçmişse $a_{i,j} = 1$, diğer durumlarda $a_{i,j} = 0$ olsun. Soruda $A = \sum_{i=1}^{20} \sum_{j=1}^{16} a_{i,j}$ ifadesinin

• $a_{i,j} = 0$ veya 1

• bir (k, l) ikilisi için $a_{k,l} = 1$ ise $\sum_{j=1}^{16} a_{k,j}$ ve $\sum_{i=1}^{20} a_{i,l}$ toplamlarının en az biri en fazla 2 olacak

koşulları altında en büyük değerini bulmamız gerekiyor. $A \leq 64$ olduğunu gösterelim.

$a_{k,l} = 1$ olsun. $\sum_{j=1}^{16} a_{k,j} \leq 2$ ise k satır-iyi, $\sum_{i=1}^{20} a_{i,l} \leq 2$ ise l sütun-iyi olsun.

k nın satır-iyi değerlerinin sayısı 20 ise, $A \leq 2 \cdot 20 = 40$.

l nin sütun-iyi değerlerinin sayısı 16 ise, $A \leq 2 \cdot 16 = 32$.

k nın satır-iyi değerlerinin sayısı 19 ise, $A \leq 2 \cdot 19 + 16 = 54$.

l nin sütun-iyi değerlerinin sayısı 15 ise, $A \leq 2 \cdot 16 + 20 = 52$.

k nın satır-iyi değerlerinin sayısı en fazla 18 ve l nin sütun-iyi değerlerinin sayısı en fazla 14 ise, satır veya sütun iyi değerlerinin toplam sayısı en fazla 32 oluyor. O zaman A nın sıfırdan farklı olan terim sayısının, iyi değerlerin toplam sayısının iki katından fazla olmadığı nedeniyle $A \leq 64$ oluyor.

$A = 64$ için örnek: $i \in \{1, 20\}$ veya $j \in \{1, 16\}$ olmak üzere, $(1, 1)$, $(1, 16)$, $(20, 1)$ ve $(20, 16)$ dışındaki tüm (i, j) ikilileri için $a_{i,j} = 1$, diğer tüm (i, j) ikilileri için $a_{i,j} = 0$ olursa, sorudaki tüm koşullar sağlanmış olur.