Bilkent Üniversitesi
Matematik Bölümü

Ayın Sorusu

Kasım 2016

Soru:

$a+b+c=4$ olmak üzere, tüm a,b,c negatif olmayan gerçel sayıları için

$$a^2+b^2+c^2+3abc \geq M(ab+bc+ca)$$

eşitsizliğini sağlayan en büyük M gerçel sayısını bulunuz.

Çözüm: Cevap: $M=2$.

$a=0$ ve $b=c=2$ alırsak $M \leq 2$ olur. $M=2$ değeri için eşitsizliği kanıtlayalım.

Genelliğ bozmadan $\max\{a,b,c\}=c$ olduğunu varsayabiliriz. $x=a+b$ ve $y=ab$ olsun.

O zaman $c \geq \dfrac{a+b+c}{3} = \dfrac{4}{3}$ ve $x=a+b \leq \dfrac{8}{3}$.

Şimdi $a^2+b^2+c^2+3abc \geq 2(ab+bc+ca) \iff x^2-2y+(4-x)^2+3y(4-x) \geq 2(y+x(4-x)) \iff 4(x-2)^2+y(8-3x) \geq 0$. $x \leq \dfrac{8}{3}$ olduğundan ispat tamamlanmıştır.