Bilkent Üniversitesi
Matematik Bölümü

Ayın Sorusu

Ekim 2016

Soru:

$S = \{1, 2, \ldots, 2016\}$ olsun. $A_1, A_2, \ldots, A_k$; S in alt kümeleri olmak üzere, her $1 \leq i < j \leq k$ için $A_i \cap A_j, A'_i \cap A_j, A_i \cap A'_j, A'_i \cap A'_j$ kümelerinden tam olarak bir tanesi boş ise, k nın alabileceği en büyük değeri bulunuz.

[$A \subset S$ ise, S in A ya ait olmayan elemanlarının kümesini A' ile gösteriyoruz.]

Çözüm: Cevap: $2 \cdot 2016 - 3 = 4029$.

Tümevarım yöntemini kullanarak $S = \{1, 2, \ldots, n\}$ için cevabın $2n-3$ olduğunu gösterelim. $\{1\}, \{2\}, \ldots \{n\}$, $\{1, 2\}$, $\{1, 2, 3\}$, $\ldots$ $\{1, 2, 3, \ldots, n-2\}$ alt kümelerinin koşulları sağladığı açıktır.

$n = 2$ için bariz şekilde k en fazla 1 olabiliyor. $n = 3$ için açık olarak $k \leq 3$. $n-1$ için $(n-1 \geq 3)$ cevabın $2n-5$ olduğunu varsayalım. n için koşulları sağlayan en büyük küme $M = \{A_1, A_2, \ldots, A_k\}$ olsun. Yukarıdaki örnek nedeniyle $k \geq 2n-3$. Açıkça $\emptyset$ ve S kümeleri M nin elemanı olamazlar. Bir $1 \leq i \leq n$ için $\{i\}$ ve $\{i\}'$ kümeleri M nin elemanı değilse bunların birini M ye ekleyip M nin eleman sayısını artırarak çelişkiye varırız. Diğer taraftan $\{i\}$ ve $\{i\}'$ aynı anda M nin elemanı olamazlar. Sonuç olarak her $1 \leq i \leq n$ için $\{i\}$ ve $\{i\}'$ kümelerinin tam olarak biri M nin elemanıdır. Herhangi bir $X \in M$ elemanını X' ile değiştirebiliriz. Dolayısıyla her $1 \leq i \leq n$ için $|A_i| \leq \dfrac{n}{2}$ olduğunu varsayabiliriz.

$2n-3 > n$ olduğundan $|A| \geq 2$ ve $|B| \geq 2$ olmak üzere her $B \in M$ için $|A| \leq |B|$ koşullarını sağlayan bir $A \in M$ kümesi bulunuyor. Genelliği bozmadan $1, 2 \in A$ olsun. $\{1\}$,$\{2\}$ ve A dışında bir $B \in M$ kümesi alalım. $A \cap B = \emptyset$ ise, $1, 2 \notin B$. $A \cap B' = \emptyset$ ise, $A \subset B$ ve $1, 2 \in B$. $A' \cap B = \emptyset$ ise, $B \subset A$ ve A nın tanımına göre $|B| = 1$. O zaman, $1, 2 \notin B$. $A' \cap B' = \emptyset$ ise, $A \cup B = E$. O zaman n tek ise, $|A|, |B| \leq \dfrac{n-1}{2}$

ve dolayısıla $|A \cup B| \leq n-1$. n çift ise, $|A| = |B| = \dfrac{n}{2}$ ve dolayısıyla $B = A'$ ve $A \cap B = \emptyset$.

Sonuç olarak $\{1\}$ ve $\{2\}$ dışındaki tüm $B \in M$ kümeleri için $\{1, 2\} \subset B$ veya $\{1, 2\} \cap B = \emptyset$. O zaman $\{1\}$ ve $\{2\}$ kümelerini M den çıkarıp M deki her kümede 1 leri atarsak $n-1$ elemanlı $S = \{2, 3, \ldots, n\}$ için bir en büyük küme elde ederiz. Tümevarım varsayımına göre, $k - 2 \leq 2n - 5$. Aynı zamanda $k \geq 2n - 3$ olduğundan $k = 2n - 3$.