



Bilkent Üniversitesi
Matematik Bölümü

AYIN SORUSU

Temmuz-Ağustos 2016

Soru: Her $m, n \in \mathbb{Z}^+$ için

$$f(mn) = f(m)f(n) \text{ ve } m + n \mid f(m) + f(n)$$

koşullarını sağlayan tüm $f : \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{Z}^+$ fonksiyonlarını bulunuz.

Çözüm: Cevap: k bir tek sayı olmak üzere $f(n) = n^k$ fonksiyonları.

İlk önce $f(1) = f(1)^2$ olduğundan $f(1) = 1$ elde ediyoruz. O zaman her n değeri için $2n + 1 \mid f(2n) + f(1) = f(2) \cdot f(n) + 1 \Rightarrow \text{ebob}(2n + 1, f(2)) = 1$. Demek ki $f(2)$ nin tek asal böleni bulunmuyor ve $f(2) = 2^k$. O zaman $3 \mid 1 + f(2) = 1 + 2^k$ olduğundan k nın tek olduğu sonucuna varıyoruz. Her m değeri için $f(2^m) = f(2) \cdot f(2) \cdots f(2) = 2^{km}$. Şimdi, tüm m ve n ikilileri için $2^m + n \mid f(2^m) + f(n) = 2^{km} + f(n)$. k tek olduğundan $2^m + n \mid 2^{km} + n^k$. Demek ki $2^m + n \mid f(n) - n^k$. Son ifadenin tüm m değerleri için doğru olduğundan $f(n) - n^k = 0$ olduğunu elde ediyoruz: k bir tek sayı olmak üzere, $f(n) = n^k$.

Diğer taraftan her tek k sayısı için $f(n) = n^k$ fonksiyonu koşulları sağlamaktadır. Çözüm tamamlandı.