**Bilkent Üniversitesi**
**Matematik Bölümü**

# Ayın Sorusu

Haziran 2016

**Soru:** $a^2+b^2+c^2 \le 3$ koşulunu sağlayan tüm $a,b,c$ negatif olmayan gerçel sayıları için

$$(a+b+c)(a+b+c-abc) \ge 2(a^2b+b^2c+c^2a)$$

eşitsizliğini kanıtlayınız.

**Çözüm:** Önce üç lemma ispatlayacağız:

*Lemma 1.*

$$a+bc \le 2.$$

*İspat:* $bc \le 2$ olma zorundadır, aksi taktirde

$$3 \ge a^2+b^2+c^2 > b^2+c^2 \ge 2bc > 4$$

çelişkisi elde edilir. İspatı tamamlamak için

$$3-b^2-c^2 \le (2-bc)^2$$

eşitsizliğini göstermemiz gerekiyor, o da

$$(bc-1)^2+(b-c)^2 \ge 0$$

eşitsizliğine denktir.

*Lemma 2.*

$$\sqrt{(4-a^2)(4-c^2)} \ge ac+2b.$$

*İspat:* $a$ ve $c$ nin 2 den küçük oldukları açıktır. O zaman

$$(4-a^2)(4-c^2)-(ac+2b)^2=16-4(a^2+b^2+c^2+abc)\geq 0$$

eşitsizliğini göstermemiz gerekiyor, o da aritmetik-geometrik ortalama eşitsizliğinin (AGO) sonucudur:

$$abc \leq \left(\frac{a^2+b^2+c^2}{3}\right)^{3/2} \leq 1.$$

*Lemma 3.*

$$a^2+b^2+c^2 \geq a^2b+b^2c+c^2a.$$

*İspat:* AGO eşitsizliğinden

$$a^2+\frac{1}{4}(ab+c^2)^2 \geq a^2b+c^2a. \tag{1}$$

AGO eşitsizliği ve Lemma 2 den

$$\frac{1}{4}\left[(4-a^2)b^2+(4-c^2)c^2\right] \geq \frac{1}{2}\sqrt{(4-a^2)(4-c^2)}bc$$

$$\geq \frac{1}{2}(ac+2b)bc = b^2c+\frac{1}{2}abc^2. \tag{2}$$

(1) ve (2) eşitsizliklerini toplarsak ispat tamamlanır.

Lemma 1 den

$$a^2b+ab^2c \leq 2ab, \quad b^2c+abc^2 \leq 2bc, \quad c^2a+a^2bc \leq 2ca.$$

Bu eşitsizlikleri toplarsak

$$2(ab+bc+ca) \geq a^2b+b^2c+c^2a+abc(a+b+c).$$

elde ederiz. Lemma 3 den

$$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$$

$$\geq a^2b+b^2c+c^2a+\left[a^2b+b^2c+c^2a+abc(a+b+c)\right]$$

Demek ki

$$(a+b+c)(a+b+c-abc) \geq 2(a^2b+b^2c+c^2a).$$

İspat tamamlandı.