



Bilkent Üniversitesi
Matematik Bölümü

AYIN SORUSU

Mayıs 2016

Soru: 23 öğrenciden oluşan bir sınıfta her öğrenci ikilisi birlikte bir film izledi. Her öğrencinin izlediği tüm filmlerin kümesi onun *film koleksiyonu* olsun. Her öğrenci her filmi en fazla bir kez izlediyse, sınıftaki öğrencilerin en az kaç farklı film koleksiyonu olabilir?

Çözüm: Cevap: Farklı film koleksiyonu sayısı k en az 3 olabilir.

Soruyu çizge kavramı kullanarak formüle edelim. 23 köşeli tam çizgenin kenarları her köşeden çıkan kenarlar farklı renkli olacak koşuluyla boyayalım. Her köşe için bu köşeden çıkan tüm renklerin koleksiyonunu tanımlayalım. En az kaç farklı renk koleksiyonu olabilir?

$k = 1$ ise her köşeden çıkan bir c_0 rengi alalım. O zaman 23 köşe c_0 renkli kenarlarla birleştirilmiş ikililere ayrılacak, çelişki. $k = 2$ ise v_1, \dots, v_l köşeleri birinci, u_1, \dots, u_{23-l} köşeleri ise ikinci koleksiyonlu köşeler olsun. v_1 ve u_1 köşelerini birleştiren kenarın rengi c_0 olsun. O zaman her köşeden çıkan bir c_0 renkli kenar bulunuyor ve yine $k = 1$ durumundaki çelişkiye varıyoruz. Şimdi $k = 3$ için örnek verelim. Köşeleri v_0, \dots, v_{10} , u_0, \dots, u_{10} ve w olarak üç gruba ayıralım. Her $0 \leq i \leq 10$ ve $0 \leq j \leq 10$ için

v_i ve v_j köşelerini birleştiren kenarı $c_{(i+j) \bmod(11)}$ rengine
 v_i ve w köşelerini birleştiren kenarı $c_{(i+i) \bmod(11)}$ rengine
 u_i ve u_j köşelerini birleştiren kenarı $d_{(i+j) \bmod(11)}$ rengine
 u_i ve w köşelerini birleştiren kenarı $d_{(i+i) \bmod(11)}$ rengine
 v_i ve u_j köşelerini birleştiren kenarı $f_{(i+j) \bmod(11)}$ rengine boyayalım.

Sonuç olarak c_0, \dots, c_{10} , d_0, \dots, d_{10} , f_0, \dots, f_{10} renklerini kullanarak 23 köşeli tam çizgenin kenarlarını toplamda sadece 3 farklı koleksiyon olacak şekilde boyamış olduk: her v_i köşesinin $\{c_0, \dots, c_{10}, f_0, \dots, f_{10}\}$, her u_i köşesinin $\{d_0, \dots, d_{10}, f_0, \dots, f_{10}\}$ ve w köşesinin $\{c_0, \dots, c_{10}, d_0, \dots, d_{10}\}$ koleksiyonu oluşmuş oldu.