



Bilkent Üniversitesi
Matematik Bölümü

AYIN SORUSU

Nisan 2016

Soru: $A_1, A_2, \dots, A_k \subseteq \{1, 2, \dots, 2016\}$ kümesinin farklı alt kümeleri olmak üzere, her $1 \leq i < j \leq k$ için $A_i \cap A_j$ bir aritmetik dizi oluşturuyorsa, k 'nin alabileceği en büyük değer nedir?

Çözüm: Cevap: $\binom{2016}{0} + \binom{2016}{1} + \binom{2016}{2} + \binom{2016}{3}$. En fazla 3 eleman içeren alt kümelerin koşulları sağladığı açıktır.

Çözümü tamamlamak için en az 3 eleman içeren alt kümelerin sayısının en fazla $\binom{2016}{3}$ olduğunu göstereceğiz. $a_1 < a_2 < \dots, a_n$ olmak üzere, $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ en az 3 eleman içeren bir alt küme olsun. Biz her A için bir $f(A) = (a_1, a_2, c)$ ismi tanımlayacağız:

A bir aritmetik diziye $c = a_n$

A bir aritmetik dizi değilse $c, (a_1, a_2, \dots)$ aritmetik dizi oluşumunu bozan ilk eleman olsun.

Örnek olarak, $A = \{3, 6, 9, 12, 19, 29\}$ ise $f(A) = \{3, 6, 19\}$.

En az 3 elemanlı iki farklı alt kümenin isimleri de farklıdır ve dolayısıyla en az 3 eleman içeren alt kümelerin sayısı en fazla $\binom{2016}{3}$ olabilir. İspat tamamlandı.