Bilkent Üniversitesi
Matematik Bölümü

Ayın Sorusu

Şubat 2016

Herhangi ikisinin toplamı 1 den farklı olan tüm x, y ve z gerçel sayıları için

$$\frac{(x^2+y)(x+y^2)}{(x+y-1)^2}+\frac{(y^2+z)(y+z^2)}{(y+z-1)^2}+\frac{(z^2+x)(z+x^2)}{(z+x-1)^2}-2(x+y+z)\geq T$$

eşitsizliğini sağlayan en büyük T gerçel sayısını bulunuz.

Çözüm: Cevap: $T=-\frac{3}{4}$. İlk önce toplamları 1 den farklı her x, y gerel sayı ikilisi için

$$\frac{(x^2+y)(x+y^2)}{(x+y-1)^2}\geq x+y-\frac{1}{4} \qquad (\dagger)$$

eşitlizliğini ispatlayalım. $x+y=a$ ve $xy=b$ değişkenlerine geçersek ispatlanması gereken eşitsizlik

$$4\left(b^2+b(1-3a)+a^3\right)\geq (a-1)^2(4a-1)$$

oluyor ve ispat

$$4\left(b^2+b(1-3a)+a^3\right)-(a-1)^2(4a-1)=(2b+3a-1)^2\geq 0$$

olarak tamamlanıyor. Eşitlik durumu $2b+3a=2xy+3(x+y)=1$ iken sağlanıyor. (x,y), (y,z) ve (z,x) ikilileri için $(\dagger)$ eşitsizlizliklerini toplarsak

$$\frac{(x^2+y)(x+y^2)}{(x+y-1)^2}+\frac{(y^2+z)(y+z^2)}{(y+z-1)^2}+\frac{(z^2+x)(z+x^2)}{(z+x-1)^2}-2(x+y+z)\geq -\frac{3}{4}$$

elde ederiz. Demek ki $T\geq -\frac{3}{4}$. $x=y=\frac{3+\sqrt{7}}{2}$ durumunda $2xy+3(x+y)=1$ olduğundan $T\leq -\frac{3}{4}$. Çözüm tamamlandı.

Not: Eşitlik durumunu sağlayan x, y ve z sayı üçlüleri

$$2xy + 3(x + y) = 1$$
$$2yz + 3(y + z) = 1$$
$$2zx + 3(z + x) = 1$$

denklem sisteminin kökleridir. İlk iki denklemi taraf tarafa çıkarırsak

$$(x - z)(2y + 3) = 0$$

elde ederiz. $y = -3/2$ olmas durumunda ikinci denklemden dolayı $1 = 2yz + 3y + 3z = 3y$ ve buradan da $y = 1/3$ çelişkisi elde edilir. Bu nedenle $x = z$ olmaldr. Benzer işlemler sonucu $x = y = z = u$ ve buradan da $2u^2 + 6u = 1$ elde edilir. Sonuç olarak eşitliği sağlayan iki üçlü bulunuyor:

$$x = y = z = \frac{3 + \sqrt{7}}{2} \quad \text{ve} \quad x = y = z = \frac{3 - \sqrt{7}}{2}\ .$$