Bilkent Üniversitesi
Matematik Bölümü

Ayın Sorusu

Aralık 2015

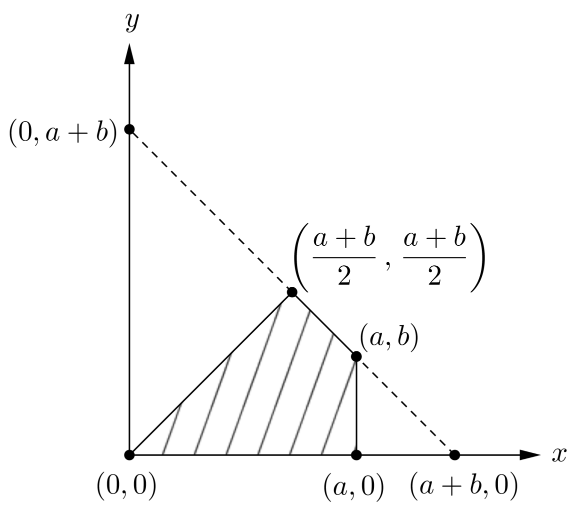
Soru: $a \geq b \geq 0$ gerçel sayılar olsun. Koordinat düzleminde,

$$K = \{(x, y) : x \geq y \geq 0 \text{ ve her } n \text{ pozitif tam sayısı için } a^n + b^n \geq x^n + y^n\}$$

biçiminde tanımlanan bölgenin alanını bulunuz.

Çözüm: $(x, y) \in K \iff x + y \leq a + b$ ve $x \leq a$ olduğunu gösterelim. $(x, y) \in K$ olsun. $n = 0$ alırsak $x + y \leq a + b$ elde ederiz. Diğer yandan $n \to \infty$ alırsak

$$x = \max\{x, y\} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{x^n + y^n}{2}} \leq \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{a^n + b^n}{2}} = \max\{a, b\} = a.$$



elde ederiz. Şimdi $x + y \leq a + b$ ve tüm (x, y) ikilileri için $x \leq a$ olsun. O zaman tüm $n \in \mathbb{N}$ için $x^n + y^n \leq a^n + b^n$ olduğunu ispatlamamız gerekiyor. Son eşitsizlik

$$y^n - b^n = (y-b)\left(\sum_{i=0}^{n-1} y^i b^{n-1-i}\right) \leq (a-x)\left(\sum_{i=0}^{n-1} x^i a^{n-1-i}\right) = a^n - x^n \qquad (\dagger)$$

eşitsizliğine denktir. $y-b \leq a-x$ ve $0 \leq y \leq x \leq a$, $0 \leq b \leq a$ olduğundan $(\dagger)$ doğrudur. Sonuç olarak K bölgesi

$$K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \geq x \geq y \geq 0 \quad \text{ve} \quad x+y \leq a+b\}$$

gibi de tanımlanabiliyor. Buradan K bölgesinin alanının $\dfrac{(a+b)^2}{4} - \dfrac{b^2}{2} = \dfrac{a^2+2ab-b^2}{4}$ olduğunu elde ediyoruz.