Bilkent Üniversitesi
Matematik Bölümü

Ayın Sorusu

Nisan 2015

Soru:

2015 kişinin katıldığı bir davette, herhangi 7 kişiden en çok 12 ikili birbiriyle el sıkışmıştır. Bu davetteki el sıkışmaların sayısının en çok kaç olabileceğini belirleyiniz.

Çözüm: Cevap $1007 \cdot 1008 = 1015056$.

n kişinin katıldığı bir davette en çok yapılabilecek el sıkışma sayısı $f(n)$ olsun. 2015 kişiyi 1007 ve 1008 kişilik iki gruba ayıralım. Her grupdaki her kişi kendi grubundaki kişilerle el sıkışmayıp diğer grupdaki her kişiyle el sıkıştıysa, $f(2015) \geq 1007 \cdot 1008 = 1005056$ eşitsizliğini elde ediyoruz.

Şimdi tümevarımla her $n \geq 7$ için $n = 2k$ durumunda $f(n) \leq k^2$ ve $n = 2k+1$ durumunda $f(n) \leq k(k+1)$ olduğunu gösterelim. $n = 7$ durumu açıktır. İki durum inceleyeceğiz.

1. Varsayım $n \leq 2k-1$ için doğru olsun. O zaman $n = 2k$ için hipotez yanlışsa $f(n) = f(2k) \geq k^2 + 1$ ve birkaç el sıkışma silerek $f(n) = k^2 + 1$ elde ederiz. Her kişi en az $k+1$ el sıkışma yaptıysa $f(n) \geq \frac{2k \cdot (k+1)}{2} = k^2 + k > k^2 + 1$ oluyor. Demek ki en fazla k el sıkışma yapan birisi mutlaka bulunuyor. Bu kişiyi atarsak $2(k-1)+1$ kişi en az $k^2 + 1 - k$ el sıkışma yapmıştır ve bu durumda da $k^2 + 1 - k > (k-1)k$ olduğundan çelişki elde ediyoruz.

2. Varsayım $n \leq 2k$ için doğru olsun. O zaman $n = 2k+1$ için hipotez yanlışsa $f(n) = f(2k+1) \geq k^2 + k + 1$, ve birkaç el sıkışma silerek $f(n) = k^2 + 1$ elde ederiz. Her kişi en az $k+1$ el sıkışma yaptıysa $f(n) \geq \frac{(2k+1) \cdot (k+1)}{2} = k^2 + k + \frac{k+1}{2} > k^2 + k + 1$ oluyor. Demek ki en fazla k el sıkışma yapan birisi mutlaka bulunuyor. Bu kişiyi atarsak $2k$ kişi en az $k^2 + 1$ el sıkışma yapmıştır ve bu durumda da $k^2 + 1 > k^2$ olduğundan çelişki elde ediyoruz. İspat tamamlandı.

Son olarak $n = 2015 = 2 \cdot 1007 + 1$ durumunda $f(2015) \leq 1007(1007+1) = 1015056$ elde ediyoruz. İspat tamamlandı.