



Bilkent Üniversitesi  
Matematik Bölümü

AYIN SORUSU

Aralık 2014

**Soru:**

Winnie The Pooh şeffaf olmayan torbanın içinde üstlerine  $1, 2, \dots, 100$  sayıları yazılmış 100 şeker bulunduğunu ve bu şekerlerin 50 tanesinin beyaz ve 50 tanesinin sarı olduğunu biliyor. O her hamlede

o torbadan rastgele bir şeker alıp tepsinin üstüne koyuyor

ve

oo *isterse* tepsinin üstünde bulunan şekerlerden aynı renkli ikisini seçip yiyor.

Winnie The Pooh üstlerine  $a$  ve  $b$  sayıları yazılmış şekerleri yiyerse  $|a - b|$  puan kazanıyor. Onun 100 hamle sonucunda toplam en fazla kaç puan kazanmayı garantileyebileceğini belirleyiniz.

**Çözüm:** Cevap:  $k = 1250$ .

$k \leq 1250$  olduğunu gösterelim. Beyaz şekerlerin numaraları  $1, 2, \dots, 50$  ve sarı şekerlerin numaraları  $51, 52, \dots, 100$  olsun. Şekerler,  $a_i > b_i$  ve  $l \leq 25$  olmak üzere  $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots, (a_l, b_l)$  ikilileri şeklinde yenilmişse en fazla  $\sum_{i=1}^l (a_i - b_i) = \sum_{i=1}^l a_i - \sum_{i=1}^l b_i \leq \sum_{i=26}^{50} i - \sum_{i=1}^{25} i = 625$  puan kazanılabilir. Benzer şekilde sarı şekerlerden de en fazla  $\sum_{i=76}^{100} i - \sum_{i=51}^{75} i = 625$  puan kazanılabilir ve sonuç olarak  $k \leq 1250$ .

Şekerleri dört gruba ayıralım: 1. grup  $1; \dots, 25$ , 2. grup  $26, \dots, 50$ ; 3. grup  $51, \dots, 75$  ve 4. grup  $76, \dots, 100$  numaralı şekerleri içersin. İlk önce Winnie The Pooh'un ilk 50 hamlede hiç şeker yemeyip daha sonra her hamlede farklı gruplardan iki şeker yiyebileceğini gösterelim. Tümevarım kullanacağız. İlk 51 hamlede tepsinin üzerine yerleştirilen 51 şekerden en az 26 tanesi aynı renklidir ve dolayısıyla farklı gruplardan iki aynı renkli şeker bulunur.  $2 \leq i \leq 50$  olmak üzere  $50 + i$ . hamleyi inceleyelim. İlk  $50 + i$  hamlede tepsine  $x + y = 50 + i$  olmak üzere,  $x$  beyaz ve  $y$  sarı şeker yerleştirilmiş olsun. Bu  $50 + i$  şekerin içinde farklı gruplardan en az  $x - 25$  beyaz ve  $y - 25$  sarı şeker ikilisi vardır. O

zaman  $x - 25 + y - 25 = i$  olduğundan  $i - 1$  hamleden sonra tepsi üzerinde hala farklı gruplardan iki aynı renkli şeker bulunuyor.

Şimdi yukarıdaki stratejinin en az 1250 puan kazandıracığını gösterelim. Winnie The Pooh şekerleri  $a_i > b_i$  olmak üzere,  $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots, (a_{50}, b_{50})$  olarak yemiş olsun. O zaman toplam kazanılan puan  $\sum_{i=1}^{50} a_i - \sum_{i=1}^{50} b_i = \sum_1 - \sum_2$  olacaktır. Her hamlede yenen şekerler farklı gruplardan olacağından  $\sum_1$  toplamı  $\{76, \dots, 100\}$  sayılarını ve  $\sum_2$  toplamı da  $\{1, \dots, 25\}$  sayılarını içerecektir ve sonuç olarak  $\sum_1 - \sum_2 \geq \sum_{i=76}^{100} i - \sum_{i=1}^{25} i + \sum_{i=26}^{50} i - \sum_{i=1}^{25} i = 1250$  olacaktır. İspat tamamlandı.