Bilkent Üniversitesi
Matematik Bölümü

Ayın Sorusu

Eylül 2014

Soru:

Pozitif tam sayılardan oluşan ve artan $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ sonsuz dizisinin her x_i elemanı için $1+x_ij^3$ ifadesini bir tam sayının küpü yapan en küçük j pozitif tam sayısı n ye eşit ise, $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ dizisine n-*dizi* diyelim. Her n pozitif tam sayısı için bir n-dizisinin varlığını kanıtlayınız.

Çözüm:

Artan $x_i = n^6i^3 + 3n^3i^2 + 3i$ dizisinin koşulları sağladığı gösterelim.

$$1 + x_in^3 = 1 + (n^6i^3 + 3n^3i^2 + 3i)n^3 = n^9i^3 + 3n^6i^2 + 3n^3i + 1 = (n^3i + 1)^3 \qquad (1)$$

olduğundan $1 + x_in^3$ bir tam sayının küpüdür. Her $0 < j < n$ için $1 + x_ij^3$ ifadesinin bir tam sayının küpü olamayacağını göstermek için

$$(n^2ij)^3 < 1 + x_ij^3 = 1 + n^6j^3j^3 + 3n^3i^2j^3 + 3ij^3 < (n^2ij + 1)^3$$

eşitsizliklerini kanıtlayalaım. İlk eşitsizlik bariz olan $0 < 3n^3i^2j^3 + 3ij^3$, ikinci eşitsizlik ise $3n^3i^2j^3 + 3ij^3 < 3n^4i^2j^2 + 3n^2ij$ eşitsizliğine denktir. İkinci eşitsizlik $j < n$ için bariz olan $3n^3i^2j^3 < 3n^4i^2j^2$ ve $3ij^3 < 3n^2ij$ $j < n$ eşitsizliklerinin taraf tarafa toplamı sonucunda elde ediliyor. İspat tamamlandı.