Bilkent Üniversitesi
Matematik Bölümü

Ayın Sorusu

Mayıs 2014

Soru:

Pozitif tam sayılardan oluşan $a_1, \ldots, a_{2014}$ dizisi

- $a_i \leq 2014$
- her $i \neq j$ için $a_i \neq a_j$
- her $i < j$ için $a_i + i \leq a_j + j$

koşullarını sağlıyorsa bu diziye *iyi* dizi diyelim. Kaç tane farklı *iyi* dizi vardır?

Çözüm:

Her $1 \leq i < j \leq n$ için $i + a_i \leq j + a_j$ n elemandan oluşan iyi dizilerin sayısı $f(n)$ olsun. O zaman $f(1) = 1$. Bir iyi dizide $a_1 = n$ olursa $a_2 = n-1, a_3 = n-2, \ldots, a_n = 1$ olma zorundadır. Bir iyi dizide $1 \leq k \leq n-1$ olmak üzere bir k için $a_{k+1} = n$ olursa $n - a_{k+2} \leq 1$ ve buradan $a_{k+2} = n-1$. Benzer şekilde tüm $3 \leq j \leq n-k$ değerleri için $a_{k+j} = n+1-j$ olma zorundadır. O zaman disinin ilk k elemanından oluşan kısmı $a_1, a_2, \ldots, a_k$ da iyi dizi olma zorundadır ve $a_1, a_2, \ldots, a_k$ ve $a_{k+1}, \ldots, a_n$ dizilerinin bileşimi de bariz şekilde iyi dizi olacaktır. Sonuç olarak $f(n) = 1 + f(1) + f(2) + \cdots + f(n-1)$ ve buradan $f(n) = 2f(n-1)$ elde ediyoruz: $f(n) = 2^{n-1}$. Cevap: 2^{2013}.