Bilkent Üniversitesi
Matematik Bölümü

Ayın Sorusu

Şubat 2014

Soru:

$p^3 - q^3 = r! - 18$ eşitliğini sağlayan tüm (p, q, r) negatif olmayan tam sayı üçlülerini belirleyiniz.

Çözüm:

Cevap: tek çözüm $(9, 3, 6)$.

$r = 1$ ise $q^3 - p^3 = 17$ ve $r = 2$ ise $q^3 - p^3 = 16$ elde ediyoruz. Küpler dizisi $1, 8, 27, 64, ...$ olduğundan bu durumlarda çözüm gelmiyor.

$r \geq 3$ ise $3|(p^3 - q^3) \Rightarrow 3|(p - q) \Rightarrow 9|(p^3 - q^3) \Rightarrow r \geq 6$.

$r \geq 7$ ise $7|(p^3 - q^3 + 18)$ ve x^3 7 modunda sadece $0, \pm 1$ olduğundan bu durumda çözüm gelmiyor.

O zaman $r = 6$ ve $p^3 - q^3 = 702 = 2 \cdot 3^3 \cdot 13$. $p^3 - q^3 = (p - q)((p - q)^2 + 3pq)$ olduğundan $p - q$ ifadesi 3 ile bölünüyor. $p - q = 3k$ olsun: $k(3k^2 + pq) = 2 \cdot 3 \cdot 13$. $k > 2$ durumunda $k(3k^2 + pq) > 2 \cdot 3 \cdot 13$ oluyor. Buradan $k = 1, 2$. $k = 1$ durumunda $pq = 75$, $p - q = 3$ ve çözüm gelmiyor. $k = 2$ durumunda $pq = 27$, $p - q = 6$ ve tek çözüm $(9, 3, 6)$ oluyor.