Bilkent Üniversitesi
Matematik Bölümü

Ayın Sorusu

Kasım 2013

Soru:

Başlangıçta 2014×2014 satranç tahtasının birim kareleri siyah veya beyaz renge boyanmıştır. Bu tahtanın tüm sütun permütasyonlarıyla elde edilen 2014! satranç tahtasının en fazla kaç farklı boyanmış köşegeni (en sol ve en üst birim karede başlayan) olabilir?

Çözüm:

Cevap: $2^{2014} - 2014$. Başlangıçtaki satranç tahtası A, tahtanın sütunları $i = 1, 2, \ldots, 2014$ olmak üzere C_i ve C_i sütununun birim kareleri de $(c_{i,1}, c_{i,2}, \ldots, c_{i,2014})$ olarak boyanmış olsunlar. Bir kaç sütun permütasyonu ile A dan elde edilen tahta A^* ve bu tahtanın köşegeni de $D(A^*)$ olsun. Sorunun çözümü bir gözleme dayanıyor: $D(A^*)$ köşegeninin birim kareleri farklı sütunların birim karelerinden oluşuyorlar. $c_{i,j}$ dan farklı rengi $\bar{c}_{i,j}$ ile göstereceğiz.

En az 2014 farklı köşegenin elde edilemeyeceğini gösterelim:

Durum 1. Başlangıçta tüm sútunlar farklı boyanmışlar. O zaman her$l = 1, 2, \ldots, 2014$ için $(\bar{c}_{l,1}, \bar{c}_{l,2}, \ldots, \bar{c}_{l,2014})$ köşegeni elde edilemez.

Durum 2. l ve m numaralı köşegenler aynı boyanmışlar: $C_l = (c_{l,1}, c_{l,2}, \ldots, c_{l,2014})$ $= (c_{m,1}, c_{m,2}, \ldots, c_{m,2014}) = C_m$. O zaman her $s = 1, 2, \ldots, 2014$ değeri için $(\bar{c}_{l,1}, \bar{c}_{l,2}, \ldots, \bar{c}_{l,s-1}, c_{l,s}, \bar{c}_{l,s+1}, \ldots, \bar{c}_{l,2014})$ gibi boyanmış köşegen elde edilemez.

Her iki durumda en az 2014 köşegen elde edilemiyor.

Başlangıçtaki tahtanın köşegen üzerinde yerleşen birim kareleri siyah tüm diğer birim kareleri ise beyaz renge boyanmış olsunlar. Bu durumda bariz şekilde tam olarak 2013 siyah birim kare içeren köşegenler dışında tüm köşegenler elde ediliyor dolayısıyla cevap $2^{2014} - 2014$ oluyor.