



Bilkent Üniversitesi  
Matematik Bölümü

## AYIN SORUSU

Ekim 2013

### Soru:

Uzayda herhangi üçü doğrudan olmayan  $N$  nokta var, her nokta ikilisi bir doğru parçasıyla birleştirilmiştir ve her doğru parçası mavi veya kırmızı renklere boyanmıştır.

- tam olarak bir kenarı mavi olan üçgen

ve

- herhangi ikisi aynı renkli doğru parçasıyla birleştirilmiş 13 nokta

bulunmuyorsa,  $N$  en fazla kaç olabilir?

### Çözüm:

$A$  noktalar kümesinin bütün nokta ikililerini birleştiren doğru parçaları kırmızıysa  $A$  kümesine *kırmızı bileşik* küme diyelim.  $A_1$  en fazla eleman içeren kırmızı bileşik küme olsun ( en fazla eleman içeren kırmızı bileşik küme sayısı birden fazlaysa kümelerden herhangi birini alabiliriz).  $A_1$  kümesi en fazla eleman içerdiğinden  $A_1$  dışında herhangi bir  $c$  noktası  $A_1$  in tüm noktalarına kırmızı doğru parçalarıyla birleşemez ve tam olarak bir kenarı mavi olan üçgen bulunmadığından  $c$  noktası  $A_1$  in tüm noktalarına mavi doğru parçalarıyla birleştirilme zorundadır. Benzer şekilde her  $k \geq 2$  için  $|\cup_{i=1}^k A_i| = N$  olanadek  $\cup_{i=1}^{k-1} A_i$  kümesinin dışındaki noktalardan en fazla eleman içeren kırmızı bileşik  $A_k$  kümeleri tanımlayalım. Yukarıda gösterdiğimiz gibi,  $A_i$  dışındaki her  $c$  noktası  $A_i$  in tüm noktalarına mavi doğru parçalarıyla birleştirilmiştir. Dolayısıyla her  $i \neq j$  için  $A_i$  ve  $A_j$  nin noktaları sadece mavi doğru parçalarıyla birleştirilmiştir. Tüm nokta ikilileri aynı renkli doğru parçalarıyla birleştirilmiş 13 nokta bulunmadığından  $|A_i| \leq 12$  ve  $k \leq 12$  elde ediyoruz. Buradan  $N \leq 12 \cdot 12 = 144$ .  $|A_i| = 12$ ;  $k = 1, 2, \dots, 12$  durumunda  $N = 144$  oluyor.