Bilkent Üniversitesi
Matematik Bölümü

Ayın Sorusu

Temmuz-Ağustos 2013

Soru:

$3 \nmid p+q+r$ olmak üzere, $p+q+r$ ve $pq+qr+rp+3$ sayılarının tam kare olmasını sağlayan tüm (p,q,r) asal sayı üçlülerini bulunuz. $3|p+q+r$ olacak biçimde, $p+q+r$ ve $pq+qr+rp+3$ sayılarının tam kare olmasını sağlayan (p,q,r) asal sayı üçlüsü var mıdır?

Çözüm: p,q,r asal sayılarının en az birinin 2 olduğunu gösterelim. Eksi halde tüm durumlar: $(p,q,r) \equiv (1,1,1)$, $(1,1,3)$, $(1,3,3)$, $(3,3,3) \pmod 4$. $(1,1,1)$, $(1,3,3)$ durumlarında $x^2 = p+q+r \equiv 3 \pmod 4$ olduğundan ve $(1,1,3)$, $(3,3,3)$ durumlarında $y^2-3 = pq+qr+rp \equiv 3 \pmod 4$ olduğundan çelişki elde ediyoruz. İspat tamamlandı. Genelliği bozmadan $p=2$ ve $q \le r$ olsun. O zaman

$$q+r = x^2-2, \quad qr = y^2-2x^2+1$$

Şimdi $3 \mid y$ ise $(q+2)(r+2) = y^2+1 \equiv 1 \pmod 3$. Demek ki $q \equiv r \equiv 2 \pmod 3$ veya $q \equiv r \equiv 0 \pmod 3$. Fakat $q \equiv r \equiv 0 \pmod 3$ durumunda çelişki elde ediyoruz: $x^2-2 \equiv 0 \pmod 3$. $q \equiv r \equiv 2 \pmod 3$ ise $x^2-2 \equiv 1 \pmod 3$ and $3 \mid x$, fakat $33 \nmid x$ ve buradan $3 \mid y$, çelişki. $33 \nmid x$ olduğundan $x^2 \equiv y^2 \equiv 1 \pmod 3$ ve sonuç olarak $qr = y^2-2x^2+1 \equiv 0 \pmod 3$ ve buradan $q=3$. Şimdi $r = x^2-5$ ve $3r = y^2-2x^2+1$ olduğundan $5r = y^2-9 = (y-3)(y+3)$. $r = 2,3,5$ durumlarında x tam sayı olmuyor. Demel ki $r > 5$. $y-3 = 1$ olduğundan $y-3 = 5$, $r = y+3$ and $r = 11$. $x = 4$, $y = 8$ ise $(p,q,r) = (2,3,11)$. Sonuç olarak çözümler $(p,q,r) = (2,3,11)$ ve bu sayıların permütasyonlarıdır.

$(p,q,r) = (2,11,23)$ üçlüsü koşulları sağlıyor.