Bilkent Üniversitesi
Matematik Bölümü

Ayın Sorusu

Haziran 2013

Soru:

$\dfrac{n!-1}{2n+7}$ sayısının tam olmasını sağlayan tüm n pozitif tam sayılarını bulunuz.

Çözüm: Cevap: $n = 1, 5, 8$.

İlk 6 tam sayıdan sadece $n = 1$ ve $n = 5$ değerlerinde $\dfrac{n!-1}{2n+7}$ tam sayı oluyor.
$n \geq 7$ olsun. $2n+7$ asal değilse onun bir asal böleni $p_1 \leq n$, fakat p_1 aynı zamanda $n!$ sayısını bölüyor. Çelişki. Demek ki $2n+7 = p$ asaldır.

$$(\frac{p-7}{2})! \equiv 1 (modp)$$

Wilson teoreminden $(p-1)! \equiv -1 (modp)$ ve aynı zamanda

$$(p-1)! \equiv (-1)^{\frac{p-7}{2}} \cdot ((\frac{p-7}{2})!)^2 \cdot \frac{p-5}{2} \cdot \frac{p-3}{2} \cdot \frac{p-1}{2} \cdot \frac{p+1}{2} \cdot \frac{p+3}{2} \cdot \frac{p+1}{2} \equiv (-1)^{\frac{p-1}{2}} \frac{225}{64} (modp)$$

O zaman $225 \equiv (-1)^{\frac{p+1}{2}} 64 (modp)$. $p = 4l+1$ ise $p|225+64 = 17^2$ fakat $p \geq 21$, çözüm gelmiyor. $p = 4l+3$ ise $p|225-64 = 7 \cdot 23$. $p \geq 21$ olduğundan $p = 23$ ve $n = 8$. $n = 8$ koşulları sağlıyor.