**Bilkent Üniversitesi**
**Matematik Bölümü**

# Ayın Sorusu

Mayıs 2013

**Soru:**

$a+b+c=1$ olmak üzere, tüm negatif olmayan $a,b,c$ gerçel sayıları için

$$\frac{a^2+b^2+c^2+\frac{3}{4}abc}{ab+bc+ca} \geq T$$

eşitsizliği sağlanıyorsa, $T$ nin alabileceği en büyük değer nedir?

**Çözüm:** Cevap: $T = \frac{13}{12}$. İlk önce

$$\frac{a^2+b^2+c^2+\frac{3}{4}abc}{ab+bc+ca} \geq \frac{13}{12}$$

eşitsizliği ispatlayalım. $a+b+c=1$ olduğundan

$$\frac{(a^2+b^2+c^2)(a+b+c)+\frac{3}{4}abc}{(ab+bc+ca)(a+b+c)} \geq \frac{13}{12}$$

elde ediyoruz. Parantezleri açarsak eşitsizlik

$$12a^3+12b^3+12c^3 \geq a^2b+ab^2+a^2c+ac^2+b^2c+bc^2+30abc \qquad (\dagger)$$

haline gelir. Şimdi AG ortalama eşitsizliğinden

$10a^3+10b^3+10c^3 \geq 30\sqrt[3]{a^3b^3c^3} = 30abc$

$\frac{1}{3}a^3 + \frac{1}{3}a^3 + \frac{1}{3}b^3 \geq \sqrt[3]{a^3a^3b^3} = a^2b$

$\frac{1}{3}a^3 + \frac{1}{3}a^3 + \frac{1}{3}c^3 \geq \sqrt[3]{a^3a^3c^3} = a^2c$

$\frac{1}{3}b^3 + \frac{1}{3}b^3 + \frac{1}{3}a^3 \geq \sqrt[3]{b^3b^3a^3} = ab^2$

$\frac{1}{3}b^3 + \frac{1}{3}b^3 + \frac{1}{3}c^3 \geq \sqrt[3]{b^3b^3c^3} = b^2c$

$\frac{1}{3}c^3 + \frac{1}{3}c^3 + \frac{1}{3}a^3 \geq \sqrt[3]{c^3c^3a^3} = ac^2$

$\frac{1}{3}c^3 + \frac{1}{3}c^3 + \frac{1}{3}b^3 \geq \sqrt[3]{c^3c^3b^3} = bc^2$

eşitsizliklerini elde ediyoruz. Bu yedi eşitsizliği toplarsak (†) ispatlanmış olur.

$a = b = c = \frac{1}{3}$ durumunda $\frac{13}{12} \geq T$ elde ederiz. Çözüm tamamlandı.