



Bilkent Üniversitesi  
Matematik Bölümü

## AYIN SORUSU

Mart 2013

**Soru:**

$a$  ve  $b$  nin hangi negatif olmayan tam değerlerinde  $\frac{ab^2 - b}{a^2 + b^2}$  ve  $\frac{ba^2 - a}{a^2 + b^2}$  ifadelerinin her biri tam sayıdır?

**Çözüm:**

$a = 0$  ise  $b = 1$  ve  $b = 0$  ise  $a = 1$  olma zorundadır.  $a, b > 0$  durumunu inceleyelim.  $a$  ve  $b$  sayılarının asal çarpanlarına ayıralım.  $p^s$   $a$  nın,  $p^t$  ise  $b$  nin çarpanı olsun. Genelliği bozmadan  $s \leq t$  olsun. O zaman  $p^{2s}$  sayısı  $ba^2$  ve  $a^2 + b^2$  sayılarını bölüyor fakat  $a$  sayısını bölmüyor ve sonuç olarak  $\frac{ba^2 - a}{a^2 + b^2}$  tam sayı olamaz. Demek ki  $a$  ve  $b$  aralarında asaldır ve buradan  $b$  ve  $a^2 + b^2$  aralarında asaldır.  $\frac{ab^2 - b}{a^2 + b^2} = \frac{b(ab - 1)}{a^2 + b^2}$  tam sayı olduğundan  $a^2 + b^2$  sayısı  $ab - 1$  i bölüyor.  $ab - 1 < ab \leq 2ab \leq a^2 + b^2$  olduğundan  $ab = 1$  elde ediyoruz:  
 $(a, b) = (0, 1), (1, 0), (1, 1)$ .