Bilkent Üniversitesi
Matematik Bölümü

Ayın Sorusu

Temmuz - Ağustos 2012

Soru:

$A_1, A_2, \ldots, A_k$, $\{1, 2, \ldots, 2012\}$ kümesinin farklı alt kümeleri olmak üzere;

her $1 \leq i \leq k$ için $|A_i| = 3$ ve her $1 \leq i < j \leq k$ için $|A_i \cap A_j| \neq 1$ ise,

k en fazla kaç olabilir? (A kümesinin eleman sayısı $|A|$ ile gösterilmiştir).

Çözüm:

Cevap: $k = 2012$.

$A_1, A_2, \ldots, A_k$, $\{1, 2, \ldots, n\}$ kümesinin koşulları sağlayan alt kümeleri olsun. O zaman $k \leq n$ olduğunu kanıtlayacağız. $A_i \cap A_l \neq \emptyset$ ve $A_j \cap A_l \neq \emptyset$ durumunda $A_i \cap A_j \neq \emptyset$ olduğu açıktır. Bunu kullanarak, kendi aralarında kesişen alt kümeleri aynı gruba yerleştirerek $A_1, A_2, \ldots, A_k$ alt kümelerini birkaç gruba ayıralım. $\mathbf{G}$ bu gruplardan biri olsun. $\mathbf{G}$ ye dahil olan alt kümelerin bileşiminin eleman sayısını $f(\mathbf{G})$ ile gösterelim. $A_l = \{a, b, c\} \in \mathbf{G}$ olsun. Üç ikili alalım: $(a, b), (b, c), (a, c)$.

Durum 1. $\mathbf{G}$ nin bu ikililerden en az ikisini içeren elemanları vardır. Genelliği bozmadan bunlar $A_r = \{a, b, d\}$ ve $A_s = \{a, c, e\}$ olsun. $A_r \cap A_s \neq empty$ olduğundan $d = e$ elde ediyoruz. O zaman $\mathbf{G}$ en fazla bir farklı alt küme daha içerebilir ($A_t = \{b, c, d\}$ alt kümesi). Sonuç olarak $\mathbf{G}$ nin eleman sayısı dördü geçmiyor ve $f(\mathbf{G}) = 4$.

Durum 2. $\mathbf{G}$ nin her elemanı aynı (a, b) ikilisini içeriyor. Bu durumda $f(\mathbf{G})$ ile $\mathbf{G}$ nin eleman sayısının farkı ikiye eşittir.

İspat tamamlanmıştır ve sonuç olarak $k \leq 2012$.

$k = 2012$ için örnek: $\{1, 2, \ldots, 2012\}$ kümesini her biri dört elemandan oluşan 503 alt kümeye ayıralım ve her $\{a, b, c, d\}$ dörtlüsü için koşulları sağlayan $\{a, b, c\}$, $\{a, b, d\}$, $\{a, c, d\}$ ve $\{b, c, d\}$ alt kümelerini tanımlayalım.