Bilkent Üniversitesi
Matematik Bölümü

Ayın Sorusu

Şubat 2012

Soru:

$S = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ pozitif gerçel sayılar kümesi olsun. Her $l \in \{2, 3, 4, 5\}$ için, S kümesinin $|S_i^l| = \dfrac{|S|}{l}$; $i = 1, 2, \ldots, l$ koşulunu sağlayan birbirlerinden ayrık $S_1^l, S_2^l, \ldots, S_l^l$ altkümeleri bulunuyorsa, n en az kaç olabilir? (A kümesinin elemanlarının toplamı $|A|$ ile gösterilmiştir).

Çözüm:

İlkönce $n \geq 9$ olduğunu göstereseğiz. $\sum_{i=1}^{n} a_i = A$ olsun. $n \leq 8$ olduğunu farz edelim. $l = 5$ alırsak $|S_i^5| = \dfrac{A}{5}$ ve her i için $a_i \leq \dfrac{A}{5}$ elde ederiz. En az iki $S_i^5, i = 1, \ldots, 5$ altkümesinin birer elemanı var, ve buradan iki elemanın eşt olduğunu elde ediyoruz: $a_s = a_t = \dfrac{A}{5}$. Çelişki ve $n \geq 9$.

$S = \{1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11, 12\}$ kümesi koşulları sağlıyor:

$l = 2$: $\{4, 5, 10, 11\}, \{1, 2, 7, 8, 12\}$.
$l = 3$: $\{1, 7, 12\}, \{4, 5, 11\}, \{2, 8, 10\}$.
$l = 4$: $\{4, 11\}, \{5, 10\}, \{7, 8\}, \{1, 2, 12\}$.
$l = 5$:$\{1, 11\}, \{2, 10\}, \{4, 8\}, \{5, 7\}, \{12\}$.

Demek ki, cevap $n = 9$.

Not. S kümesinin bazı elemanlarının eşit alınmasına izin verilse bile $n \geq 9$ olduğunu gösterebiliriz. $n \leq 8$ olduğunu farz edelim. $l = 4$ alırsak $|S_1^4| = |S_2^4| = |S_l^3| = |S_l^4| = \dfrac{A}{4}$

ve her S_i^4 en az iki elemandan oluşma zorunda, dolayısıyla $n = 8$. S kümesinin en az altı elemanının k bir pozitif tam sayı olmak üzere $\dfrac{A \cdot k}{5}$ şeklinde olduğunu gösterelim.

S kümesinin sadece iki elemanı $\dfrac{A}{5}$ ya eşit olsun. O zaman $\dfrac{A}{4}$ elde etmek için iki tane $\dfrac{A}{20}$ elemanı bulunmalıdır. $l = 5$ durumunda $\dfrac{A}{5}$ elde etmek için ise her $\dfrac{A}{20}$ için birer $\dfrac{3A}{20}$ bulunmalıdır. Toplamda altı tane $\dfrac{A \cdot k}{20}$ şeklinde eleman elde ettik.

S kümesinin en az üç elemanı $\dfrac{A}{5}$ ya eşit olsun. O zaman $\dfrac{A}{4}$ elde etmek için en az üç $\dfrac{A}{20}$ elemanı bulunmalıdır. Yine toplamda altı tane $\dfrac{A \cdot k}{20}$ şeklinde eleman elde ettik.

$l = 3$ alırsak, en az bir S_i^3 altkümesinde sadece $\dfrac{A \cdot k}{20}$ şeklindeki elemanlar bulunacaktır. Bu elemanların toplamı $|S_i^3| = \dfrac{A}{3}$ olamaz. Çelişki ve $n \geq 9$.