Bilkent Üniversitesi
Matematik Bölümü

Ayın Sorusu

Eylül 2011

Soru:

$a_1 = 1, a_2 = 1$ ve her $n > 2$ için $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ olsun. Her doğal k sayısı için

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{a_i a_{i+2}} \leq A$$

eşitsizliğini sağlayan en küçük A gerçel sayısını belirleyiniz.

Çözüm:

Tümavarım metodunu kullanarak

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i a_{i+2}} = 1 - \frac{1}{a_{n+1} a_{n+2}} \qquad (\dagger)$$

eşitliğini kanıtlayalım.

1. $n = 1$ durumunda $(\dagger)$ sağlanıyor.

2. $n = k$ durumunda $(\dagger)$ sağlanmış olsun. O zaman

$$\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{a_i a_{i+2}} = 1 - \frac{1}{a_{n+1} a_{n+2}} + \frac{1}{a_{n+1} a_{n+3}} = 1 - \frac{a_{n+3} - a_{n+2}}{a_{n+1} a_{n+2} a_{n+3}} = 1 - \frac{1}{a_{n+2} a_{n+3}}$$

ve $(\dagger)$ eşitliğinin ispatı tamamlandı. $n \to \infty$ ise $a_n \to \infty$ olduğundan A gerçel sayının en küçük değeri 1' dir.