



Bilkent Üniversitesi
Matematik Bölümü

AYIN SORUSU

Haziran 2011

Soru:

a ve b iki doğal sayı olmak üzere; $d_n, n = 1, 2, \dots$ dizisi

$$d_n = \sqrt[n+1]{a^n + b^n}$$

olarak tanımlanmıştır. $\{d_n\}$ dizisinin her elemanını tam sayı yapan tüm (a, b) ikililerini belirleyiniz.

Çözüm:

Bu çözümde 0 sayısını doğal sayı olarak kabul etmiyoruz. $d_n \leq a + b$ olmak zorunda: $d_n > a + b$ olursa $d_n^{n+1} > (a + b)^{n+1} > a^n + b^n$ ve çözüm bulunamaz. Demek ki $d_n, n = 1, 2, \dots$ dizisi sınırlıdır ve bir d ve sonsuz tane n sayısı için $d = \sqrt[n+1]{a^n + b^n}$. $a \geq b$ olsun. O zaman sonsuz tane n için

$$(a/d)^n + (b/d)^n = d.$$

$a > d$ olursa, sol tarafın üst sınırı yoktur. Buradan $a \leq d$ elde ediyoruz. O zaman $(a/d)^n + (b/d)^n \leq 1 + 1 = 2$. Buradan $d = 1$ veya $d = 2$. $d = 1$ durumunda çözüm yoktur. $d = 2$ durumunda ise tek çözüm $a = b = 2$.