



Bilkent Üniversitesi
Matematik Bölümü

AYIN SORUSU

Mayıs 2011

Soru:

a, b ve c pozitif gerçel sayılar olmak üzere, $f(x) = ax^2 + bx + c$ olsun. Negatif olmayan tüm $x_1, x_2, \dots, x_{1024}$ sayıları için

$$\sqrt[1024]{f(x_1) \cdot f(x_2) \cdots f(x_{1024})} \geq f(\sqrt[1024]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_{1024}}).$$

eşitsizliğini kanıtlayınız.

Çözüm:

Tüm $x, y > 0$ sayıları için

$$f(x) \cdot f(y) \geq (f(\sqrt{xy}))^2 \quad (\dagger)$$

eşitsizliğini kanıtlayalım:

$$\begin{aligned} f(x) \cdot f(y) - (f(\sqrt{xy}))^2 &= ab(x^2y + xy^2 - 2xy\sqrt{x}\sqrt{y}) + ac(x^2 + y^2 - 2xy) + bc(x + y - 2\sqrt{xy}) \\ &= abxy(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 + ac(x - y)^2 + bc(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geq 0 \end{aligned}$$

(\dagger) eşitsizliğini kullanarak

$$\begin{aligned} f(x_1) \cdot f(x_2) \cdots f(x_{1024}) &\geq \prod_{i=1}^{1023} (f(\sqrt{x_i x_{i+1}}))^2 \geq \prod_{i=1}^{1021} (f(\sqrt{x_i x_{i+1} x_{i+2} x_{i+3}}))^4 \geq \cdots \geq \\ &\geq f(\sqrt[1024]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_{1024}})^{1024} \end{aligned}$$

elde ediyoruz ve çözüm tamamlanıyor.