



Bilkent Üniversitesi
Matematik Bölümü

AYIN SORUSU

Şubat 2011

Soru:

Tüm a, b, c, d pozitif gerçel sayıları için

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{a^5 + b^5 + c^5} + \frac{b^2 + c^2 + d^2}{b^5 + c^5 + d^5} + \frac{c^2 + d^2 + a^2}{c^5 + d^5 + a^5} + \frac{d^2 + a^2 + b^2}{d^5 + a^5 + b^5} \leq \frac{a + b + c + d}{abcd}$$

eşitliliğini kanıtlayınız.

Çözüm:

Aritmetik ortalama - geometrik ortalama eşitsizliğinden

$$a^5 + a^5 + a^5 + b^5 + c^5 \geq 5a^3bc, \quad b^5 + b^5 + b^5 + a^5 + c^5 \geq 5b^3ac, \quad c^5 + c^5 + c^5 + a^5 + b^5 \geq 5c^3ab.$$

Bu üç eşitsizliği toplarsak $5(a^5 + b^5 + c^5) \geq 5(a^3bc + b^3ac + c^3ab)$ veya

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{a^5 + b^5 + c^5} \leq \frac{1}{abc} = \frac{d}{abcd} \quad (*)$$

elde ederiz. (*) ve (b, c, d) , (c, d, a) , (d, a, b) üçlüleri için benzer eşitsizlikleri toplarsak çözüm tamamlanır.