Bilkent Üniversitesi
Matematik Bölümü

AYIN SORUSU

Kasım 2010

Soru:

13 sayısından büyük olmayan ve l, m ve k pozitif tam sayılar olmak üzere, $\dfrac{2^l - 2^m}{10^k}$ şeklinde gösterilebilen tüm doğal sayıları bulunuz.

Çözüm:

Cevap: 3,6,12.

$3 = \dfrac{2^5 - 2^1}{10^1}$, $6 = \dfrac{2^6 - 2^2}{10^1}$, $12 = \dfrac{2^7 - 2^3}{10^k}$.

$i = 1, 2, \ldots$ olmak üzere, 2^i sayılarının son rakamlarının oluşturduğu dizi periyodu 4 olan bir dizidir. Buradan $l = m + 4j$ ve

$$n = \frac{2^m(2^{2j} - 1)(2^{2j} + 1)}{2^k \cdot 5^k}$$

elde ediyoruz. $2^{2j} - 1$ ve $2^{2j} + 1$ sayıları aralarında asaldır ve bu sayılardan biri 5^k çarpanını içeriyor. Bu sayı 5^k dışında başka çarpan içeremez: bu durumda ek çarpan en az 3 tür ve $(2^{2j} - 1)(2^{2j} + 1) \geq 3 \cdot 7 > 13$ oluyor.

$2^{2j} - 1 = 5^k$ olursa, $j \neq 0, 1$ olduğundan $n = 2^{m-k}(2^{2j} + 1) > 13$.

$2^{2j} + 1 = 5^k$ olursa $n = 2^{m-k}(2^{2j} - 1)$ ve tüm $j > 1$ için $n > 13$. $j = 1$ durumunda $n = 3, 6, 12$ sayıları elde ediliyor.