Bilkent Üniversitesi
Matematik Bölümü

Ayın Sorusu

Haziran 2010

Soru:

Azalmayan $a_1, a_2, \ldots$ doğal sayılar dizisinde her k değeri için $a_{a_k} = 3k$ ise, a_{2010} elemanının alabileceği tüm değerleri belirleyiniz.

Çözüm:

Dizi artan dizidir: $a_n = a_m$ olsun. O zaman $a_{a_n} = a_{a_m}$ ve $3n = 3m$.

Bir n değeri için $a_n \leq n$ olsun. O zaman $3n = a_{a_n} \leq a_n \leq n$, çelişki. Buradan $a_n > n$. $a_{3n} = a_{a_{a_n}} = 3a_n$.

Bir n değeri için $a_n \geq 3n$. O zaman $3n = a_{a_n} \geq a_{3n} = 3a_n$, veya $a_n \leq n$, çelişki. Demek ki $n < a_n < 3n$. Sonuç olarak, $a_1 = 2$, $a_2 = a_{a_1} = 3$ ve $a_{3^n} = 2 \cdot 3^n$. $a_{2 \cdot 3^n} = a_{a_{3^n}} = 3^{n+1}$.

$3^n < l < 2 \cdot 3^n$ olsun. O zaman $a_{3^n} < a_l < a_{2 \cdot 3^n}$ ve $2 \cdot 3^n < a_l < 3^{n+1}$ elde ediyoruz. Dizi artan dizidir ve $2 \cdot 3^n - 3^n = 3^{n+1} - 2 \cdot 3^n$. Buradan $a_{3^n+t} = 2 \cdot 3^n + t$.

$2 \cdot 3^n < l < 3^{n+1}$ olsun. O zaman $a_{2 \cdot 3^n} < a_l < a_{3^{n+1}}$, veya $3^{n+1} < a_l < 2 \cdot 3^{n+1}$. $l = 2 \cdot 3^n + t$ ise $a_{2 \cdot 3^n + t} = 3^{n+1} + s$. s yi belirleyelim. $a_{a_{2 \cdot 3^n + t}} = a_{3^{n+1}+s}$ olduğundan $3 \cdot (2 \cdot 3^n + t) = 2 \cdot 3^{n+1} + s$. Sonuç olarak $s = 3t$ ve $a_{2 \cdot 3^n + t} = 3^{n+1} + 3t$.

Dizinin tüm terimleri tek türlü belirlenmiş oldu. Şimdi $a_{2010} = 3 \cdot a_{670}$ ve $a_{670} = a_{2 \cdot 3^5 + 184} = 3^6 + 3 \cdot 184$. Cevap: $a_{2010} = 3843$.