Bilkent Üniversitesi
Matematik Bölümü

Ayın Sorusu

Mayıs 2010

Soru:

a, b ve c pozitif gerçel sayılar olmak üzere, $s = abc$ olsun.

$$\frac{a^3 - s}{2a^3 + s} + \frac{b^3 - s}{2b^3 + s} + \frac{c^3 - s}{2c^3 + s} \leq L$$

eşitsizliğini sağlayan en küçük L sayısını belirleyiniz.

Çözüm: $L = 0$ olduğunu ispatlayalım.

$$f(a, b, c) = \frac{a^3 - s}{2a^3 + s} + \frac{b^3 - s}{2b^3 + s} + \frac{c^3 - s}{2c^3 + s}$$

olsun. $f(t, t, t) = 0$ olduğundan, $L \geq 0$.

$L \leq 0$, diğer deyişle $f(a, b, c) \leq 0$ olduğunu ispatlayalım.

$$f(a, b, c) = \frac{-3a^3s^2 - 3b^3s^2 - 3c^3s^2 + 9s^3}{(2a^3 + s)(2b^3 + s)(2c^3 + s)} = \frac{3s^2(3s - a^3 - b^3 - c^3)}{(2a^3 + s)(2b^3 + s)(2c^3 + s)}$$

olduğundan $3s - a^3 - b^3 - c^3 \leq 0$ eşitsizliğini ispatlamamız derekiyor. Son eşitsizlik ise a^3, b^3, c^3 sayıları için aritmetik-geometrik eşitsizliğidir.