Bilkent Üniversitesi
Matematik Bölümü

Ayın Sorusu

Aralık 2009

Soru:

Her $[a, b] \subset [0, 1]$ intervali için $\{2^n x\} \in [a, b]$ koşulunu sağlayan bir n doğal sayısı bulunuyorsa, $x \in [0, 1]$ sayısına iyi sayı diyelim. Sonsuz tane iyi sayının varlığını kanıtlayınız.

Not: $[x]$, x sayısının tam değeri olmak üzere, $\{x\} = x - [x]$.

Çözüm:

x iyi sayıysa, her k doğal sayısı için $x/2^k$ da iyi sayıdır. Dolayısıyla, sadece bir tane iyi sayının varlığını göstermek yeterlidir.
İkilik sayı sistemini kullanacağız. $x \in [0, 1]$ olsun. $t_1 t_2 \dots t_k$, $t_i = 0, 1$; $1 \leq i \leq k$ olmak üzere, k uzunluklu hangi bloku alırsak alalım, bir n doğal sayısı için $\{2^n x\}$ sayısı ikilik sistemde $0.t_1 t_2 \dots t_k$ ile başliyorsa, x sayısı bariz şekilde iyi sayıdır.
Şimdi yukarıdaki koşulu sağlayan bir x sayısı belirleyeceğiz. $b_1 = 0, b_2 = 1, b_3 = 00, b_4 = 01, b_5 = 10, b_6 = 11, b_7 = 000, b_8 = 001, \dots$ bloklarını tanımlayalım. $x = 0.b_1 b_2 b_3 \dots b_i \dots$ olsun. Bir l için $t_1 t_2 \dots t_k = b_l$ olma zorundadır. İkilik siatemde $\{2x\}$ sayısı x sayısından sol tarafa bir kademe kaydırışla elde ediliyor. Demek ki, öyle bir n sayısı vardır ki, $2^n x$ sayısı $0.b_l$ ile başlıyor.İspat tamamlandı.