Bilkent Üniversitesi
Matematik Bölümü

Ayın Sorusu

Eylül 2009

Soru:

(a_n) gerçel sayılar dizisi $a_1 = 2$ ve her doğal n sayısı için $a_{n+1} = \dfrac{n}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}$ koşullarını sağlıyor. $a_{2009} > 0.9995$ olduğunu kanıtlayınız.

Çözüm:

$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n > n$ eşitsizliğini tümevarımla ispatlayalım.

1. $n = 1$ ise $s_1 = 2 > 1$.
2. $s_n > n$ olsun. O zaman $s_{n+1} - (n+1) = s_n + a_{n+1} - (n+1) = s_n - (n+1) + \dfrac{n}{s_n} = \dfrac{s_n^2 - (n+1)s_n + n}{s_n} = \dfrac{(s_n - n)(s_n - 1)}{s_n} > 0$. İspat bitti.

Şimdi $a_{n+1} = \dfrac{n}{s_n} < 1$ olduğundan tüm $n \geq 2$ için $a_n < 1$ elde ediyoruz. Demek ki $s_n = 2 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n < n + 1$. Sonuç olarak $a_n = \dfrac{n}{s_n} > \dfrac{n}{n+1}$ ve $a_{2009} > \dfrac{2009}{2010} > 0.9995$.