Bilkent Üniversitesi
Matematik Bölümü

Ayın Sorusu

Temmuz-Ağustos 2009

Soru:

$a_1, a_2, \ldots, a_{2009}$ pozitif sayıları her $2 \leq i \leq 2009$ için $a_i \geq a_1 + a_2 + \cdots + a_{i-1}$ koşulunu sağlıyorsa,

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \cdots + \frac{a_{2008}}{a_{2009}}$$

ifadesinin alabileceği en büyük değeri bulunuz.

Çözüm:

Cevap: $\dfrac{2009}{2}$.

$1 \leq i \leq 2008$ olmak üzere, her i için negatif olmayan $\Delta_i = a_{i+1} - a_1 - a_2 - \cdots - a_i$ sayılarını tanimlayalım.

Buradan $1 - \dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{\Delta_1}{a_2}$ ve $2 \leq i \leq 2008$ olmak üzere, her i için $\dfrac{1}{2} - \dfrac{a_i}{a_{i+1}} = \dfrac{\Delta_i - \Delta_{i-1}}{2a_{i+1}}$ elde ediyoruz.

O zaman

$$\frac{2009}{2} - \sum_{i=1}^{2008} \frac{a_i}{a_{i+1}} = 1 - \frac{a_1}{a_2} + \sum_{i=2}^{2008} \left(\frac{1}{2} - \frac{a_i}{a_{i+1}}\right) = \frac{\Delta_1}{a_2} + \sum_{i=2}^{2008} \frac{\Delta_i - \Delta_{i-1}}{2a_{i+1}}$$

$$= \frac{\Delta_1}{2a_2} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2007} \Delta_i \Big(\frac{1}{a_{i+1}} - \frac{1}{a_{i+2}}\Big) + \frac{\Delta_{2008}}{2a_{2009}} \geq 0$$

(negatif terim yok!). Sonuç olarak, $\sum_{i=1}^{2008} \frac{a_i}{a_{i+1}}$ ifadesi en büyük değerini her $i, 1 \leq i \leq 2008$ için $\Delta_i = 0$ durumunda ($a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_{i-1} = 2^{i-2}a_1$) alıyor ve bu değer $\dfrac{2009}{2}$dir.