Bilkent Üniversitesi
Matematik Bölümü

Ayın Sorusu

Şubat 2009

Soru:

$\dfrac{11^{p-1}-1}{p}$ ifadesinin tam kare olmasını sağlayan tüm p asal sayılarını belirleyiniz.

Çözüm:

$p=2$ çözüm değildir : $\dfrac{11^{2-1}-1}{2}=5.$

$p=3$ çözüm değildir : $\dfrac{11^{3-1}-1}{3}=40.$

$p>3$ olsun. Önce $p=6k+1$ olduğunu gösterelim: $pa^2=11^{p-1}-1=(11^2-1)(11^{p-3}+11^{p-5}+\cdots+11=1)$ ve $11^2-1=3\cdot4\cdot10$ olduğundan $11^{p-3}+11^{p-5}+\cdots+11+1$ ifadesi 3 ile bölünüyor ve sonuç olarak $p=6k+1$. Buradan $11^{6k}-1=pa^2$ elde ediyoruz. $11^{6k}-1=(11^{3k}-1)(7^{3k}+1)$ ve $ebob(11^{3k}-1,11^{3k}+1)=2$ olduğundan $(11^{3k}-1)(11^{3k}+1)$ çarpanlarının biri $2b^2$ diğeri ise $2pc^2$ olma zorundadır.

$2b^2=1(mod11)$ denkleminin tam çözümü olmadığından $11^{\frac{p-1}{2}}+1=11^{3k}+1$ ifadesi $2b^2$ şeklinde olamaz. Sonuc olarak

$11^{\frac{p-1}{2}}-1=2b^2$ ve $11^{\frac{p-1}{2}}+1=2pc^2$.

Durum 1: $p=4l+1$. $11^{\frac{p-1}{2}}-1=(11^l-1)(11^l+1)=2b^2$. ve $ebob(11^l-1,11^l+1)=2$ olduğundan

$11^l - 1 = 2m^2$ ve $11^l + 1 = 4s^2$ ($11^l + 1 = 2m^2$ olamaz). $11^l + 1 = 4s^2$ olduğundan $11^l = (2s)^2 - 1^2$ elde ediyoruz. Çelişki.

Durum 2: $p = 4k + 3$. $p = 6l + 1$ olduğundan $p = 12l + 7$ sonucuna varıyoruz. $11^{\frac{p-1}{2}} - 1 = 11^{6l+3} - 1 = (11^{2l+1} - 1)(11^{4l+2} + 11^{2l+1} + 1) = 2b^2$. $2l + 1 = r$ olsun. $ebob(11^{2l+1} - 1, 11^{4l+2} + 11^{2l+1} + 1) = ebob(11^r - 1, 11^{2r} + 11^r + 1)$. $(11^{2r} + 11^r + 1) - (11^r - 1) \cdot (11^t + 1) = 3$ olduğundan $ebob(11^r - 1, 11^{2r} + 11^r + 1)$ 1 veya 3 olma zorundadır. Fakat her iki sayı 3 e bölünmüyor (r tek sayıdır). Sonuc olarak $ebob(11^r - 1, 11^{2r} + 11^r + 1) = 1$. $11^{2r} + 11^r + 1$ sayısı tek olduğundan tam kare olma zorundadır. Fakat $(11^t)^2 < 11^{2r} + 11^r + 1 < (11^t + 1)^2$.

$\dfrac{11^{p-1} - 1}{p}$ ifadesinin tam kare olmasını sağlayan asal sayı yoktur.