Bilkent Üniversitesi
Matematik Bölümü

Ayın Sorusu

Ekim 2008

Soru:

$\mathbb{Z}$ tam sayılar kümesi olmak üzere, tüm $m, n \in \mathbb{Z}$ için

$$f(n) - f(n + f(m)) = m \tag{1}$$

koşulunu sağlayan hiçbir $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ fonksiyonunun bulunmadığını kanıtlayınız.

Çözüm:

f fonksiyonu (varsa) farklı noktalarda farklı değerler alıyor: $f(n + f(m_1)) = f(n) - m_1$ ve $f(n + f(m_2)) = f(n) - m_2$ olduğundan $f(m_1) = f(m_2)$ ise $m_1 = m_2$.

f fonksiyonu tum tam değerleri alıyor: (1) denkleminde $m = 0$ yazarsak $f(n + f(0)) = f(n)$. Dolayısıyla $f(0) = 0$. Yine (1) denkleminde $n = 0$ yazarsak $f(f(m)) = -m$.

$f(n+m) = f(n + f(f(-m))) = f(n) - f(f(-m)) = f(n) + f((f(f-m))) = f(n) + f(m)$ olduğundan $f(n) = cn$. $f(f(m)) = -m$ denkleminde $f(n) = cn$ yazarsak: $c^2 n = -n$ veya $c^2 = -1$ elde ediyoruz. İspat bitti.