Bilkent Üniversitesi
Matematik Bölümü

Ayın Sorusu

Temmuz-Ağustos 2008

Soru:

$k > 1$ bir tam sayı, $p = 6k + 1$ bir asal sayı ve $m = 2^p - 1$ olmak üzere,

$$\frac{2^{m-1} - 1}{127m}$$

sayısının bir tam sayı olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

m ve 127 sayılarının her birinin $2^{m-1} - 1$ ifadesini böldüyünü gösterelim. Fermat teoreminden $2^p \equiv 2 (mod p) \Rightarrow m = 2^p - 1 \equiv 1 (mod p) \Rightarrow p \mid m - 1$. O zaman $2^p - 1 \mid 2^{m-1} - 1 \Rightarrow m \mid 2^{m-1} - 1$. Doğer taraftan, $6 \mid p - 1 \Rightarrow 63 = 2^6 - 1 \mid 2^{p-1} - 1 \Rightarrow 7 \mid 2^p - 2 \Rightarrow 7 \mid m - 1 \Rightarrow 127 = 2^7 - 1 \mid 2^{m-1} - 1$. Şimdi m ve 127 sayılarının aralarında asal olduğunu gösterirsek cözüm tamamlanır: 127 asal sayı olduğundan, 127 nin m sayısını bölmediğini göstermemiz yeterlidir. $p = 7k + n (0 \leq n < 7)$ olsun. $k > 1 \Rightarrow p > 7$ ve p sayısı 7 ye bölünmüyor $\Rightarrow n \neq 0$. $127 = 2^7 - 1 \mid 2^{7k} - 1 \Rightarrow 127 \mid 2^{7k+n} - 2^n = 2^p - 2^n$. $127 \mid m$ olsaydı $127 \mid 2^n - 1$ olurdu, fakat $0 < 2^n - 1 < 127$.