



Bilkent Üniversitesi  
Matematik Bölümü

AYIN SORUSU

Haziran 2008

**Soru:**

2008  $\times$  2008 bir satranç tahtasının bazı birim kareleri boyanıyor. Tahtanın  $i$ . satır ve  $j$ . sütunundaki birim kareyi  $(i, j)$  ile;  $x \leq i$  ve  $y \leq j$  koşullarını sağlayan boyalı  $(x, y)$  birim karelerinin kümesini de  $S_{i,j}$  ile gösteriyoruz. Başlangıçta boyalı her  $(i, j)$  birim karesine  $S_{i,j}$  ye ait boyalı karelerin sayısı yazılıyor. Daha sonraki her adımda, boyalı her  $(i, j)$  birim karesine,  $S_{i,j}$  deki karelere bir önceki adım sonunda yazılmış olan sayıların toplamı yazılıyor. Sonlu sayıda adım sonunda boyalı birim karelere yazılı tüm sayıların tek sayı haline geleceğini gösteriniz.

**Çözüm:**

$f_{(i,j)}$ , mod 2 de  $(i, j)$  karesine yazılmış sayı olsun. 0. adımda tüm boyalı karelere 1 yazıldığını kabul edebiliriz. Boyalı karelerin sayısı  $n$  olsun. Soruyu  $n$  üzerinden tümevarımla çözelim.  $n = 1$  durumu açıktır.  $n = k$  için soru doğru olsun,  $n = k + 1$  durumunu inceleyelim. Bazı boyalı birim kareler arasında sıralama yapalım: if  $i \leq k$  ve  $j \leq k$  ise  $(i, j) \preceq (k, l)$  deyeceğiz.  $(p, q)$  bu sıralamaya göre en büyük karelerden herhangi biri olsun.  $(p, q)$  karesi herhangi adımda herhangi bir birim karedeki sayıyı etkilemiyor.  $(p, q)$  karesini silerseniz, tümevarım varsayımına göre,  $N$  adım sonra tüm boyalı karelere 1 yazılmış olacak. Demek ki,  $(p, q)$  karesi silinmezse  $N$  adım sonra  $f_{(p,q)}$  dışındaki tüm kareler için  $f_{(i,j)} = 1$  olacak.  $f_{(p,q)} = 1$  olursa, soru biter.  $f_{(p,q)} = 0$  olsun. Demek ki, ilk  $N$  adımda  $f_{(p,q)}$  ye 1 eklenmiş ve  $f_{(p,q)}$ , 1 den 0 a dönüşmüştür. O zaman  $2N$  adım sonucunda tüm boyalı birim kareler için  $f_{(i,j)} = 1$  olacak.