Bilkent Üniversitesi
Matematik Bölümü

Ayın Sorusu

Ekim 2007

Soru:

$$x^y \cdot y^x = y^y$$

denkleminin tüm negatif olmayan rasyonel cözümlerini bulunuz.

Çözüm: Çözüm kümesinin $(x, y) = (0, 0)$ ve k doğal sayı olmak uüzere, (k^{k-1}, k^k) olduğunu gösterelim.

(x, y) rasyonel, pozitif çözüm ikilisi olsun. Yeni $t = \frac{y}{x}$ değişkeni tanımlarsak, $x^{tx}(tx)^x = (tx)^{(tx)}$ veya $x = t^{t-1}$ elde ederiz. $t - 1 = k$ nın doğal sayı olduğunu ispatlayalım. $x = (k+1)^k$ ifadesinde $(m, n) = 1$ ve $(p, q) = 1$ olmak úzere $x = \frac{m}{n}$ ve $k = \frac{p}{q}$ yazarsak

$$m^q q^p = n^q (p+q)^p$$

elde ederiz. $(m, n) = 1$ olduğundan $n^q | q^p$. $(p, q) = 1$ olduğundan $((p+q)^p, q^p) = (p+q, q)^p = (p, q)^p = 1$. Demek ki $q^p | n^q$ ve sonuç olarak $q^p = n^q$. $q > 1$ olsun. q^p sayısını asal çarpanlarına ayıralım. Her çarpanın kuvveti p ve q ye böländüyünden pq ye de bölünüyor. Demek ki q sayısını da asal çarpanlarına ayırırsak, her çarpanın kuvveti q ile bölünme zorunda olacaktır. $q < 2^q$ olduğundan çelişki elde ediyoruz. Sonuç olarak $q = 1$ ve $x = k^{k-1}$, $y = k^k$ sonucuna varıyoruz. $(0, 0)$ ve (k^{k-1}, k^k) ikililerinin çözüm oldukları kolaylıkla kontrol ediliyor.