Bilkent Üniversitesi
Matematik Bölümü

Ayın Sorusu

Eylül 2007

Soru:
Tüm α, β ve γ üçgen açıları için

$$\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta - \cos \gamma \leq A$$

eşitsizliğini sağlayan en küçük A gerçel sayısını bulunuz.

Çözüm: Cevap: $\frac{5}{4}$.

$$f = \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta - \cos \gamma < \frac{5}{4} \tag{1}$$

eşitsizliğini ispatlayalım:
$f = 2 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta - \cos \gamma = 1 - \frac{1}{2}(\cos 2\alpha + \cos 2\beta) + \cos(\alpha + \beta) = 1 - (\cos(\alpha + \beta)(\cos(\alpha - \beta) - 1)$ olduğundan (1) eşitsizliği

$$(\cos(\alpha + \beta)(1 - \cos(\alpha - \beta)) < \frac{1}{4} \tag{2}$$

eşitsizliğine eşdeğerdir.
(2) eşitsizliğini ispatlamak için $ab \leq \frac{(a+b)^2}{4}$ eşitsizliğini kullanalım:
$(\cos(\alpha+\beta)(1-\cos(\alpha-\beta)) \leq \frac{1}{4}(\cos(\alpha+\beta)+1-\cos(\alpha-\beta))^2 = \frac{1}{4}(1-2\sin\alpha\sin\beta)^2 < \frac{1}{4}$ (α ve β üçgen açıları olduklarından $0 < \sin\alpha\sin\beta < 1$). (1) eşitsizliği ispatlandı.

$\gamma = \dfrac{2\pi}{3}$ ise ve α açısı da $\dfrac{\pi}{3}$ değerine yaklaşıyorsa, f ifadesi $\frac{5}{4}$ değerine yaklaşıyor.
Çözüm tamamlandı.