Bilkent Üniversitesi
Matematik Bölümü

Ayın Sorusu

Temmuz-Ağustos 2007

Soru:
a, b, c pozitif gerçel sayıları $a+b+c=1$ koşulunu sağlıyorsa,

$$\frac{1}{ab+2c^2+2c}+\frac{1}{bc+2a^2+2a}+\frac{1}{ca+2b^2+2b}\geq\frac{1}{ab+bc+ca}$$

olduğunu kanıtlayınız.

Çözüm:
Önce

$$\frac{1}{ab+2c^2+2c}\geq\frac{ab}{(ab+bc+ca)^2} \tag{1}$$

eşitsizliğini ispatlayalım: $a^2+b^2\geq 2ab$ ve $a+b+c=1$ olduğundan

$(ab+bc+ca)^2 = a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2a^2bc+2b^2ca+2c^2ab = a^2b^2+(a^2+b^2)c^2+2abc(a+b+c)\geq a^2b^2+2abc^2+2abc = ab(ab+2c^2+2c)$.

Şimdi (1) eşitsizliğinden $a\to b, b\to c, c\to a$ ve $a\to c, b\to a, c\to b$ yer değiştirmeleriyle iki yeni eşitsizlik elde ediyoruz. Bu üç eşitsizliği toplarsak sorudaki eşitsizliği ispatlamış oluruz.