Bilkent Üniversitesi
Matematik Bölümü

Ayın Sorusu

Mayıs 2007

Soru: a, b, c pozitif gerçel sayıları $a+b+c=1$ koşulunu sağlıyorsa,

$$\frac{1}{a(2-a)+bc}+\frac{1}{b(2-b)+ac}+\frac{1}{c(2-c)+ab}\geq\frac{9}{2}$$

olduğunu kanıtlayınız.

Çözüm:

Aritmetik - Harmonik ortalama eşitsizliğinden

$$\frac{1}{a(2-a)+bc}+\frac{1}{b(2-b)+ac}+\frac{1}{c(2-c)+ab}\geq\frac{9}{2(a+b+c)-a^2-b^2-c^2+ab+bc+ac}$$

Sağ tarafın paydasını ele alalım:

$2(a+b+c)-a^2-b^2-c^2+ab+bc+ac=2-(a^2+b^2+c^2-(ab+bc+ac))$

$=2-\frac{1}{2}((a-b)^2+(b-c)^2+(a-c)^2)\leq 2.$

Ispat tamamlandı. Eşitlik durumu için $a=b=c=\frac{1}{3}$ koşulu zorunluludur.