Bilkent Üniversitesi
Matematik Bölümü

AYIN SORUSU

Nisan 2007

Soru: Hangi n pozitif tek sayıları için,

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = n^4$$

eşitliğini sağlayan $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tek sayılarının bulunduğunu belirleyiniz.

Çözüm:
Cevap: k negatif olmayan tam sayı olmak üzere, $n = 8k + 1$.

$n = 1$ ise, $x_1 = 1$ bir çözümdür. $n > 1$ ise, x tek sayı olduğundan $x^2 \equiv 1(\mod 8)$ ve

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \equiv 1 + 1 + \cdots + 1 = n$$

Aynı zamanda, $n^4 = (n^2)^2 \equiv 1(\mod 8)$ ve dolayısıyla, $n \equiv 1(\mod 8)$. Şimdi de $n = 8k + 1$ ise, istenilen eşitliği sağlayan $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sayılarının bulunduğunu göstereceğiz.

$$(8k+1)^4 = (8k-1)^4 + (8k+1)^4 - (8k-1)^4$$
$$= (8k-1)^4 + ((8k+1)^2 - (8k-1)^2)((8k+1)^2 + (8k-1)^2)$$
$$(8k-1)^4 + 32k(128k^2 + 2)$$
$$(8k-1)^4 + 4k(32k-1)^2 + (16k-1)^2 + (92k-1)$$
$$= (8k-1)^4 + 4k(32k-1)^2 + (16k-1)^2 + 92(k-1) + 91$$
$$= (8k-1)^4 + 4k(32k-1)^2 + (16k-1)^2 + (k-1)(9^2 + 3^2 + 1^2 + 1^2) + (9^2 + 3^2 + 1^2)$$

ve son satırda $1 + 4k + 1 + 4(k-1) + 3 = 8k + 1$ tane tek kare vardır.

$(8k+1)^4$ sayısı $8k+1$ tane tek karenin toplamı şeklinde farklı yollardan gösterilebilir (Tomas Jurikin önerisi):

$$(8k+1)^4 = (64k^2+16k+1)^2 = ((64k^2+16k-1+2)^2$$
$$= (64k^2+16k-1)^2 + 4(64k^2+16k-1) + 4 = (64k^2+16k-1)^2 + 16^2k^2 + 64k$$
$$= (64k^2+16k-1)^2 + (16k+1)^2 + 32k - 1$$
$$= (64k^2+16k-1)^2 + (16k+1)^2 + k(5^2+1^2+1^2+1^2+1^2+1^2+1^2) + \underbrace{1^2+\cdots+1^2}_{(k-1)}$$

ve son satırda $2+7k+(k-1) = 8k+1$ tane tek kare vardır.