



Bilkent Üniversitesi
Matematik Bölümü

AYIN SORUSU

Mart 2007

Soru:

A_1, A_2, \dots, A_n noktaları aynı düzlem üzerindeler ve bu düzlem üzerindeki herhangi P noktasından bu noktalara olan uzaklıklardan en az bir tanesi irasyonel sayıdır. n en az kaç olabilir?

Çözüm:

Cevap: 3.

A_1 ve A_2 noktalarının orta dikme doğrusu üzerinde $|PA_1| = |PA_2| = \text{rasyonelsayı}$ olacak şekilde sonsuz tane P noktası bulunabilir. Demek ki $n \geq 3$. $n = 3$ olduğunu göstereyim.

A_1 ve A_2 noktalarını aralarındaki uzaklık $\sqrt[4]{2}$ olacak biçimde seçelim. A_3 noktası ise $[A_1A_2]$ doğru parçasının orta noktası olsun. P noktası A_1A_2 doğrusu üzerinde ise, $|PA_i|, i = 1, 2, 3$ uzaklıklarının en az biri irasyoneldir. Diğer durumda koşeleri A_1, P, A_2 ve Q olan bir paralelkenar alalım. O zaman

$$|A_1A_2|^2 + |PQ|^2 = 2|PA_1|^2 + 2|PA_2|^2,$$

veya

$$|A_1A_2|^2 = 2|PA_1|^2 + 2|PA_2|^2 - 4|PA_3|^2$$

elde ediyoruz. $|A_1A_2|^2 = (\sqrt[4]{2})^2 = \sqrt{2}$ irasyonel olduğundan $|PA_1|, |PA_2|, |PA_3|$ sayılarından en az biri irasyonel olma zorundadır.