Bilkent Üniversitesi
Matematik Bölümü

Ayın Sorusu

Şubat 2007

Soru:
$a_1, a_2, \dots, a_{1024}$ pozitif gerçel sayıların çarpımı P olsun.

$$\prod_{i=1}^{1024} (1 + \frac{1}{a_i^{1024} + a_i^{2048}}) \geq (1 + \frac{1}{P + P^2})^{1024}$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm:
a, b gerçel sayıları için

$$\left(1 + \frac{1}{a^2 + a^4}\right)\left(1 + \frac{1}{b^2 + b^4}\right) \geq \left(1 + \frac{1}{ab + a^2b^2}\right)^2 \qquad (*)$$

eşitsizliğini ispatlayalım.
Eşitsizliğin her iki tarafını $a^2b^2(1 + a^2)(1 + b^2)(1 + ab)^2$ ile çarpalım:

$$(1 + a^2 + a^4)(1 + b^2 + b^4)(1 + ab)^2 \geq (1 + a^2)(1 + b^2)(1 + ab + a^2b^2)^2$$

Parantezleri açarsak (27+24 terim!) ve sadeleştirme yaparsak

$$a^4 + b^4 - 2a^2b^2 + 2ab^5 + 2a^5b - a^2b^4 - a^4b^2 - 2a^3b^3 + a^2b^6 + a^6b^2 - 2a^4b^4 \geq 0$$

elde ederiz. Son eşitsizliği

$$(a^2 - b^2)^2 + ab(2b^4 + 2a^4 - ab^3 - a^3b - 2a^2b^2) + a^2b^2(a^2 - b^2)^2$$

$$= (a^2 - b^2)^2 + ab((a^2 - b^2)^2 + (a - b)^2(a^2 + ab + b^2)) + a^2b^2(a^2 - b^2)^2 \geq 0$$

gibi yaza biliriz ve sonuncu eşitsizlikte tüm terimler pozitif olduğundan $(*)$ ispatlanmıştır.

Şimdi tüm $n \geq 1$ ve çarpımı P_n olan gerçel $a_1, a_2, \ldots, a_{2^n}$ sayıları için

$$\prod_{i=1}^{2^n} \left(1 + \frac{1}{a_i^{2^n} + a_i^{2^{n+1}}}\right) \geq \left(1 + \frac{1}{P_n + P_n^2}\right)^{2^n} \qquad (I_n)$$

olduğunu ispatlayalım. Sorumuz $n = 10$ durumudur.
(I_1) eşitsizliği direk olarak $(*)$dan çıkar. (I_n) eşitsizliği doğru olsun.

$$\prod_{i=1}^{2\times 2^n} \left(1 + \frac{1}{a_i^{2\times 2^n} + a_i^{4\times 2^n}}\right) = \prod_{i=1}^{2^n} \left(1 + \frac{1}{a_{2i-1}^{2\times 2^n} + a_{2i-1}^{4\times 2^n}}\right)\left(1 + \frac{1}{a_{2i}^{2\times 2^n} + a_{2i}^{4\times 2^n}}\right)$$

$$\geq \prod_{i=1}^{2^n} \left(1 + \frac{1}{a_{2i-1}^{2^n} a_{2i}^{2^n} + a_{2i-1}^{2\times 2^n} a_{2i}^{2\times 2^n}}\right)^2 ((*) kullandık) \geq \left[\left(1 + \frac{1}{\prod_{i=1}^{2^n} a_{2i-1}a_{2i} + (\prod_{i=1}^{2^n} a_{2i-1}a_{2i})^2}\right)^{2^n}\right]^2$$

((I_n) kullandık).

$$\prod_{i=1}^{2\times 2^n} \left(1 + \frac{1}{a_i^{2\times 2^n} + a_i^{4\times 2^n}}\right) \geq \left(1 + \frac{1}{\prod_{i=1}^{2\times 2^n} a_i + (\prod_{i=1}^{2\times 2^n} a_i)^2}\right)^{2\times 2^n}$$

eşitsizliğini ((I_{n+1})) elde ettik. Ispat tamamlanmıştır.

$\ln(1 + \dfrac{1}{\exp x + \exp 2x})$ fanksiyonunun dışbukey olduğu kullanılarak farklı çözüm yapılabilir.