Bilkent Üniversitesi
Matematik Bölümü

AYIN SORUSU

Ocak 2007

Soru:

$$(1+\sqrt{2})^{2007} = a + b\sqrt{2}$$

koşulunu sağlayan a ve b doğal sayılarının en büyük ortak böleni kaçtır?

Çözüm: Cevap: 1.

$(1+\sqrt{2})^{2007}(1-\sqrt{2})^{2007} = -1$ olduğu açıktır.
$(1+\sqrt{2})^{2007}$ ve $(1-\sqrt{2})^{2007}$ ifadelerine Newton Binom Açılımı uygularsak $(1-\sqrt{2})^{2007} = a - b\sqrt{2}$ olduğunu görürüz (irasyonel terimler $\sqrt{2}$ nin tek kuvvetlerini içeren terimlerdir).
Demek ki $(1+\sqrt{2})^{2007}(1-\sqrt{2})^{2007} = (a+b\sqrt{2})(a-b\sqrt{2}) = a^2-2b^2$ ve $a^2-2b^2 = -1$.
d sayısı a ve b doğal sayılarının en büyük en büyük ortak böleni ise, $d|a^2$ ve $d|b^2$ olduğundan $d|(a^2-2b^2) = -1$. O zaman $d = 1$ olma zorundadır.

Soru tümevarım metoduyla da kolayca çözüle bilir:

Çözüm 2:

$n = 1, 2, \ldots,$ için $\quad (1+\sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2}$ koşulunu sağlayan a_n ve b_n doğal sayılarını tanımlayalım. a_n ve b_n sayılarının en büyük ortak böleninin tüm $n = 1, 2, \ldots$ değerleri için 1 olduğunu gösterelim.

$a_1 = b_1 = 1$ olduğu açıktır.

$$\begin{aligned} a_{n+1} + b_{n+1}\sqrt{2} = (1+\sqrt{2})^{n+1} = (1+\sqrt{2})^n(1+\sqrt{2}) &= (a_n + b_n\sqrt{2})(1+\sqrt{2}) \\ &= a_n + 2b_n + (a_n + b_n)\sqrt{2} \end{aligned}$$

olduğundan

$$a_{n+1} = a_n + 2b_n, \qquad b_{n+1} = a_n + b_n$$

elde ederiz. a_{n+1} ve b_{n+1} sayılarının her ortak böleni $2b_{n+1} - a_{n+1} = a_n$ ve $a_{n+1} - b_{n+1} = b_n$ sayılarını bölüyor. Demek ki $ebob(a_n, b_n) = 1$ ise $ebob(a_{n+1}, b_{n+1}) = 1$ olur. $\gcd(a_1, b_1) = 1$ olduğundan, tüm n değerleri için $ebob(a_n, b_n) = 1$ olduğu görülür.