Bilkent Üniversitesi
Matematik Bölümü

AYIN SORUSU

Kasım 2006

Soru:
$x_1, x_2, \dots, x_{2006}$ pozitif gerçel sayıları

$$\frac{1}{1+x_1}+\frac{1}{1+x_2}+\cdots+\frac{1}{1+x_{2006}}=1$$

koşulunu sağlıyorsa,

$x_1 x_2 \dots x_{2006}$ ifadesinin alabileceği en küçük değer nedir?

Çözüm: Cevap: 2005^{2006}.

Her $i = 1, 2, \dots, 2006$ icin $t_i = \frac{1}{1+x_i}$, tanımlarsak, $x_i = \frac{1-t_i}{t_i}$ olur ve sorumuz $\sum_{i=1}^{2006} t_i = 1$ ise $\prod_{i=1}^{2006}(\frac{1-t_i}{t_i})$ ifadesinin alabileceği en küçük değer nedir? şekline dönüşür.
Her i için aritmetik-geometrik eşitsizlikten

$$\frac{1-t_i}{t_i}=\frac{t_1+t_2+\cdots+t_{i-1}+t_{i+1}+\cdots+t_{2006}}{t_i}\geq\frac{2005\sqrt[2005]{t_1t_2\dots t_{i-1}t_{i+1}\dots t_{2006}}}{t_i}$$

elde ediyoruz. Bu eşitsizlikleri çarparsak

$$\prod_{i=1}^{2006}(\frac{1-t_i}{t_i})\geq 2005^{2006}\frac{\sqrt[2005]{t_1^{2005}t_2^{2005}\dots t_{2006}^{2005}}}{t_1t_2\dots t_{2006}}=2005^{2006}$$

elde ederiz. Son olarak $t_i = \frac{1}{2006}$ ise ifademizin 2005^{2006} değerine eşit olduğunu gözlemliyoruz: $\prod_{i=1}^{2006}(\frac{1-t_i}{t_i}) = 2005^{2006}$.