Bilkent Üniversitesi
Matematik Bölümü

Ayın Sorusu

Ekim 2006

Soru:
x_1, x_2, x_3 ve x_4 gerçel sayıları

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$

ve

$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1$

koşullarını sağlıyorsa, $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3$ ifadesinin alabileceği en büyük değer nedir?

Çözüm: Aranan en büyük değer: $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

$x_4 = -(x_1 + x_2 + x_3)$ ve $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1$ ifadelerinden $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = \frac{1}{2}$ elde ederiz. $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 \leq x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ olduğundan ((x_1, x_2, x_3) ve (x_2, x_3, x_1) vectorları için Cauchy-Schwarz eşitsizliği) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \geq \frac{1}{4}$ elde ederiz. Sonuç olarak, $x_4^2 = 1 - (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \leq 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ veya $-\frac{\sqrt{3}}{2} \leq x_4 \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$. Aynı yöntemle,

$$-\frac{\sqrt{3}}{2} \leq x_i \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad (1)$$

$i = 1, 2, 3, 4$.

$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3$ ifadesi A olsun.

$$A = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - (x_1 + x_2 + x_3)^3 = -3(x_1 + x_2)(x_1 + x_3)(x_2 + x_3).$$

$(x_1 + x_2)$, $(x_1 + x_3)$ ve $(x_2 + x_3)$ ifadelerinin işaretlerini inceleyelim(her hangi biri 0 ise, $A = 0$) . Her üç ifade pozitif ise $A < 0$.

Tam olarak iki ifade pozitif ise ($(x_1 + x_2) < 0$, $(x_2 + x_3) > 0$ ve $(x_1 + x_3) > 0$ olsun), $A = -3(x_1 + x_2)(x_1 + x_3)(x_2 + x_3) = 3(-x_1 - x_2)(x_1 + x_3)(x_2 + x_3) \leq 3(\dfrac{-x_1 - x_2 + x_1 + x_3 + x_2 + x_3}{3})^3 = \dfrac{8}{9}x_3^3 \leq \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ (Aritmetik-Geometrik eşitsizlik ve (1) kullanıldı).

Her üç ifade negatif ise $A = -3(x_1 + x_2)(x_1 + x_3)(x_2 + x_3) = 3(-x_1 - x_2)(-x_1 - x_3)(-x_2 - x_3) \leq 3(\dfrac{-x_1 - x_2 - x_1 - x_3 - x_2 - x_3}{3})^3 = 3(\dfrac{-2(x_1 + x_2 + x_3)}{3})^3 = \dfrac{8}{9}x_4^3 \leq \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ (Aritmetik-Geometrik eşitsizlik ve (1) kullanıldı).

A ifadesi $x_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}, x_2 = x_3 = x_4 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ise tam olarak $\frac{\sqrt{3}}{3}$ oluyor.