Bilkent Üniversitesi
Matematik Bölümü

Ayın Sorusu

Eylul 2006

Soru:
n doğal sayısı, 1 dahil kendisinden küçük tüm pozitif bölenlerinin toplamına eşitse, n sayısına kusursuz sayı diyelim. Her hangi tek ve kusursuz n sayısının (varsa) 105 ile bölünemeyeceğini ispatlayınız.

Not: Bu güne kadar kusursuz tek sayı bulunamadı.

Çözüm: $105 = 3 \times 5 \times 7$ sayısı n yi bölüyorsa, n sayısı

$$n = 3^{\alpha_1}\, 5^{\alpha_2}\, 7^{\alpha_3}\, p_4^{\alpha_4} \dots p_k^{\alpha_k},\ \alpha_1 \geq 1, \alpha_2 \geq 1, \alpha_3 \geq 1$$

şeklinde çarpanlarına ayırılıyor.
$S(n)$, n doğal sayısının 1 ve n dahil tüm pozitif bölenlerinin toplamı olsun:

$$S(n) = n(1+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{3^{\alpha_1}})(1+\frac{1}{5}+\dots+\frac{1}{5^{\alpha_2}})(1+\frac{1}{7}+\dots+\frac{1}{7^{\alpha_3}})(1+\frac{1}{p_4}+\dots+\frac{1}{p_4^{\alpha_4}})\dots(1+\frac{1}{p_k}+\dots+\frac{1}{p_k^{\alpha_k}}).$$

n kusursuz tek sayı olduğundan $S(n) = 2n$ ve $S(n)$ 4 ile bölünmüyor. n nin tüm asal çarpanları tek olduğundan $\alpha_1 \geq 2$ ve $\alpha_3 \geq 2$ olma zorunda, diğer durumda $\alpha_1 = 1$, $\alpha_3 = 1$:
$(1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{3^{\alpha_1}}) = \frac{4}{3}$, $(1 + \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{7^{\alpha_3}}) = \frac{8}{7}$ ve $S(n)$ 4 ile bölünüyor. Son olarak,

$$2 = \frac{S(n)}{n} \geq (1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2})(1 + \frac{1}{5})(1 + \frac{1}{7} + \frac{1}{7^2}) = \frac{13}{9}\frac{6}{5}\frac{57}{49} = \frac{4446}{2205} > 2$$

çelişkisi n nin 105 ile bölünemeyeceğini ispatlıyor.